К. В. Вагина

Научный руководитель: к. ф. м. н., доцент Фураев Валерий Зиновьевич.

ФУНКЦИЯ ГРИНА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для уравнения второго порядка можно рассматривать вопрос не только о нахождении решения по заданным в одной точке начальным условиям, определяющим в указанной точке значения как самого решения уравнения, так и его производной (Задача Коши), но и о поиске решения по граничным условиям в двух фиксированных точках, задающих в них (как в концах соответствующего промежутка) информацию о решении уравнения и (или) его производной (краевую задачу).

Краевой задачей называется такая задача, в которой требуется найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее дополнительным условиям, заданным на разных концах интервала интегрирования.

Условно краевые задачи можно подразделить:

1) Первая краевая задача, или задача Дирихле: найти на $[a, b]$ решение дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y'')$, принимающее на концах этого отрезка заданные значения $y(a) = A, \quad y(b) = B$.

2) Вторая краевая задача, или задача Неймана: найти на $[a, b]$ решение дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y'')$, удовлетворяющее на концах краевым условиям $y'(a) = A_1, y'(b) = B_1$.

3) Смешанная краевая задача: найти на $[a, b]$ решение дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y'')$, удовлетворяющее на концах краевым условиям $y(a) = A, y'(b) = B_1$.

Линейная краевая задача для дифференциального уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

называется однородной, если, во-первых, f(x)=0 (т.е. само дифференциальное уравнение однородно) и, во-вторых A=B=0

(т.е. граничные условия также однородны); в противном случае краевая задача называется неоднородной.

Функция Грина - функция, связанная с интегральным представлением решений краевых задач для дифференциальных уравнений. Функция Грина позволяет найти решения неоднородного уравнения, удовлетворяющие однородным краевым условиям.

Пример. (Смешанная краевая задача) Решить краевую задачу для уравнения Эйлера

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 7x\frac{dy}{dx} + 16y = 16\,ln\,x - 3$$

с неоднородными граничными условиями y(0)=0, y′(1)=1.

Решение. Выполним следующую подстановку:

$$x = e^t$$

Производные будут равны:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy/dt}{e^t} = e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d/dt}{dx/dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}}{e^t} =$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Подставляем в исходное уравнение Эйлера, имеем:

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-7e^te^{-t}\frac{dy}{dt}+16y=16t-3,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-7\frac{dy}{dt}+16y=16t-3,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-8\frac{dy}{dt}+16y=16t-3.$$

Приведем граничные условия к однородным. Для этого ищем решение в виде y(t)=z(t)+g(t), где g(t) - произвольная функция удовлетворяющая неоднородным граничным условиям рассматриваемой задачи. Выберем g(t)=t. Тогда y(t)=z(t)+t. Продифференцируем два раза: y′=z′+1, y′′=z′′. Для функции z(t) получим:

$$z''-8(z'+1)+16(z+t)=16t-3,$$

$$z''-8z'+16z=5,\ \mathrm{z}(0)=\mathrm{z}'(1)=0.$$

Запишем соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-8\lambda+16=0,\qquad \text{отсюда}\qquad D=(-8)^2-16\cdot 4=0.$$

Характеристическое уравнение имеет один корень второго порядка: λ=4. Поэтому общее решение дифференциального уравнения определяется формулой:

$$z_{\text{общ.}}=C_1e^{4t}+tC_2e^{4t}.\ \text{Тогда}\ \ z'_{\text{общ.}}=4C_1e^{2t}+C_2e^{2t}+4tC_2e^{2t}.$$

$$z(0)=C_1=0.\ \text{Тогда}\ z_1(t)=te^{4t}.$$

$$z'(1)=4C_1e^2+C_2e^2+4C_2e^2=0,\ C_1=-\frac{5C_2}{4}.\ \text{Тогда}\ z_2(t)=te^{4t}-\frac{5}{4}e^{4t}.$$

Функцию Грина будем искать в виде:

$$G(t,\xi)=\begin{cases}az_1(t), & 0\le t\le\xi,\\ bz_2(t), & \xi\le t\le 1.\end{cases}$$

Функции a и b зависят от ξ и определяются из следующих требований:

$$bz_2(\xi) = az_1(\xi), \qquad bz_2'(\xi) = az_1'(\xi) + 1.$$

Отсюда получаем следующую систему уравнений и решаем ее относительно a и b:

$$\begin{cases} a\left(\xi e^{4\xi}\right) = b\left(\xi e^{4\xi} - \frac{5}{4}e^{4\xi}\right), \\ b\left(e^{4\xi} + 4\xi e^{4\xi} - 5e^{4\xi}\right) = a\left(e^{4\xi} + 4\xi e^{4\xi}\right) + 1; \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим a:

$$a = \frac{b(4\xi - 5)}{4\xi}$$

и подставим во второе уравнение. Получим:

$$b\left(4\xi e^{4\xi} - 4e^{4\xi}\right) = \frac{b(4\xi - 5)}{4\xi}\left(e^{4\xi} + 4\xi e^{4\xi}\right) + 1,$$

$$be^{4\xi}(4\xi - 4)(4\xi) = be^{4\xi}(4\xi - 5)(1 + 4\xi) + 4\xi,$$

$$be^{4\xi}\left((4\xi - 4)(4\xi) - (4\xi - 5)(1 + 4\xi)\right) = 4\xi,$$

$$5be^{4\xi} = 4\xi,$$

$$b = \frac{4\xi}{5e^{4\xi}}, a = \frac{4\xi - 5}{5e^{4\xi}}.$$

Тогда функция Грина имеет вид:

$$G(t,\xi)=\begin{cases}\dfrac{4\xi-5}{5e^{4\xi}}\cdot e^{4t}\cdot t, & 0\le x\le\xi,\\ \dfrac{\xi}{5e^{4\xi}}\cdot e^{4t}\cdot(4t-5), & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

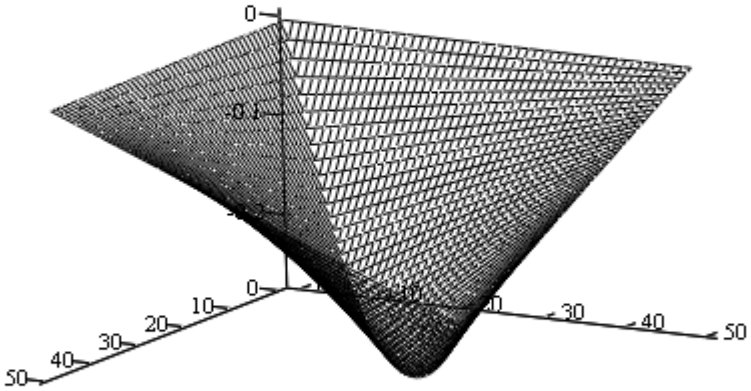

Рис. 1 График функции $G(t,\xi)$

Решение краевой задачи выражается формулой

$$z(t)=\int_0^1 G(t,\xi)f(\xi)d\xi.$$

$$z(t)=\int\limits_t^1\frac{4\xi-5}{5e^{4\xi}}\cdot 5e^{4t}\cdot t\,d\xi+\int\limits_0^t\frac{\xi}{5e^{4\xi}}\cdot 5e^{4t}\cdot(4t-5)\,d\xi=$$

$$=e^{4t}\cdot t\int\limits_t^1 e^{-4\xi}(4\xi-5)d\xi+e^{4t}\cdot(4t-5)\int\limits_0^t e^{-4\xi}\xi\,d\xi=$$

$$=e^{4t}\cdot t\cdot e^{-4t}\cdot(t-1)+e^{4t}\cdot(4t-5)\cdot\left(\frac{1}{16}-\frac{te^{-4t}}{4}-\frac{e^{-4t}}{16}\right)=$$

$$=\frac{te^{4t}}{4}-\frac{5e^{4t}}{16}+\frac{5}{16}.$$

Возвращаемся к замене переменной:

$$y(t) = z(t) + t = \frac{te^{4t}}{4} - \frac{5e^{4t}}{16} + \frac{5}{16} + t.$$

Так как $x = e^t$, то $t = ln\, x$:

$$y(x) = \frac{ln\,(x) \cdot x^4}{4} - \frac{5x^4}{16} + \frac{5}{16} + ln(x).$$

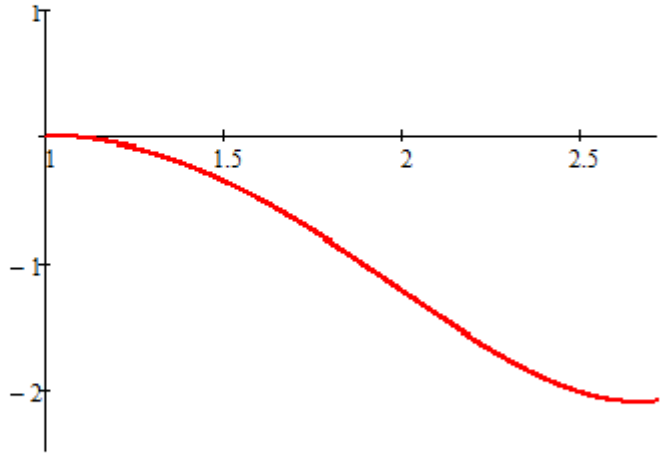

Рис. 2 График функции $y(x)$

Ответ: $\frac{ln\,(x) \cdot x^4}{4} - \frac{5x^4}{16} + \frac{5}{16} + ln(x).$