Л. А. Осипова

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ В ЗАДАНИЯХ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Одна из важнейших функций современной школы – это воспитание современного делового человека, компетентного в бытовой сфере и социально-трудовой деятельности. На сегодняшний день одним из основных требований для выпускника школы является хорошо развитое экономическое мышление, а также готовность к жизни в условиях рыночных отношений. Экономические знания стали необходимым условием любой профессиональной сферы и повседневной жизни.

Новизной заданий повышенного уровня ЕГЭ является задача, проверяющая умение учащихся использовать полученные знания и умения в реальных жизненных ситуациях. Решение такой задачи требует от учащихся умения анализировать реальные числовые данные, умения осуществлять практические расчеты по формулам. Большинство подобных задач можно отнести к задачам с экономическим содержанием.

Под задачами с *экономическим содержанием* будем понимать задачи, поставленные в области экономики, решение которых требует использования математического аппарата. Поэтому есть необходимость для формирования у учащихся общей модели решения таких задач различной сложности. Рассматривая практико-ориентированную задачу необходимо сформировать модель данной ситуации. И именно эта ситуация будет объектом для дальнейшего изучения при решении определенной задачи.

В 2016 году в ЕГЭ такие задачи входят в задание под № 17. В спецификаторе профильного уровня в графе "примерное время выполнения" задачи повышенной сложности стоит 30 минут как на задачу с параметром. За правильно решенную задачу можно получить максимально 3 балла за обоснованный и правильный ответ, то есть эта задача считается одной из самых сложных. При любой вычислительной ошибке могут быть сняты 1 или 2 балла.

Задачи с экономическим содержанием являются практико-ориентированными заданиями. Умение решать такие задачи способствует лучшему усвоению содержания курса математики средней школы, позволяет передавать приобретенные знания и навыки в сферу экономики, которые, в свою очередь, стимулируют интерес школьников к проблемам прикладного характера обучения и математики в целом. Это позволяет наиболее полно реализовывать прикладную направленность в обучении и способствовать лучшему обучению и формированию умений решать задачи данного типа.

Анализ банка задач ЕГЭ по математике, а также демоверсии ЕГЭ 2016 [1] года позволил выделить основные подходы к решению задач с практическим содержанием:

1. решение с помощью формул;
2. решение задач в общем виде;
3. решение задач с использованием свойства степеней;
4. решение задач с помощью математического анализа;
5. решение задач методом сравнения.

Все представленные в банке ЕГЭ задачи можно условно разделить на группы и подгруппы:

1. Группа (банковские задачи на вклады)
    1) нахождение срока вклада;
    2) вычисление процентной ставки по вкладу;
    3) нахождение суммы вклада;
    4) нахождение ежегодной суммы пополнения вклада.
2. Группа (банковские задачи на кредиты):
    1) нахождение количества лет выплаты кредита;
    2) вычисление процентной ставки по кредиту;
    3) нахождение суммы кредита;
    4) нахождение ежегодного транша.
3. Группа (задачи, не связанные с банковскими операциями).

Рассмотрим некоторые особенности решения задач 2 группы.

Если изначальный размер кредита обозначить за *B,* то процент банка примем равным за *p%.* Тогда ежегодная выплата по кредиту будет равна *X*; тогда через год после начисления процентов и выплаты суммы *X* размер долга составит: $B\cdot(1+\frac{p}{100})-X$.

Обозначим $a=1+\frac{p}{100}$.

Тогда через 2 года размер долга составит: $(B\cdot a-X)\cdot a-X$;

через три года: $((B\cdot a-X)\cdot a-X)\cdot a-X$;

через четыре года: $(((B\cdot a-X)\cdot a-X)\cdot a-X)\cdot a-X$;

через *n* лет: $B\cdot a^{n}-X\,(a^{n-1}+\ldots a^{3}+a^{2}+a^{1}+1)$.

Для подсчета величины в скобках иногда применяется формула суммы n членов геометрической прогрессии.

Формула для суммы n членов геометрической прогрессии следующая:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q},$$

тогда размер долга через n лет составляет

$$B \cdot a^n = \frac{X \cdot (1 - a^n)}{1 - a}.$$

ПРИМЕР 1

31 декабря Дмитрий взял в банке 429 000 рублей в кредит под 14,5 % годовых. Схема выплаты следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5 %), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными ежегодными платежами (то есть за 2 года)? [2]

Решение:

Если сумма кредита – *B*, процентная ставка – *p*, ежегодный платеж (транш) – X, тогда сумма долга ежегодно увеличивается:

Год	***Сумма долга по кредиту в начале года***	***Сумма долга с начисленными процентами в конце года***	***Остаток***
1	***B***	$B \cdot (1 + \frac{p}{100})$, если $a = 1 + \frac{p}{100}$, то $B \cdot a$	$B \cdot (1 + \frac{p}{100}) - X$ если $a = 1 + \frac{p}{100}$, то $B \cdot a - X$
2	$B \cdot a - X$	$(B \cdot a - X) \cdot a = B \cdot a^2 - a \cdot X$	X

Таблица 1

$$B \cdot a^2 - a \cdot X = X;$$

$$B \cdot a^2 = X + a \cdot X;$$

$$B \cdot a^2 = X(1 + a);$$

$$X = \frac{B \cdot a^2}{1 + a};$$

$$X = \frac{429000 \cdot (1 + \frac{14,5}{100})^2}{1 + (1 + \frac{14,5}{100})} = \frac{562429,725}{2,145} = 262205$$ (рублей)

Ответ: по 262205 рублей в год.

Большие затруднения в ходе решения вызывают задачи, в которых сумма долга уменьшается равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. В этих задачах идет речь о дифференцированном платеже. При таком типе платежа клиент отдает основной долг равными частями. Каждая выплата состоит из двух частей:

а) выплата основного долга, которая равна сумме, взятой в кредит, деленной на количество платежей;

б) проценты на *оставшуюся часть долга*.

Первая часть платежа остается неизменной, а вторая меняется с каждым платежом. Поскольку с каждой выплатой размер оставшейся части долга уменьшается, соответственно, после каждой очередной выплаты уменьшается размер выплаты процентов по кредиту.

Для нахождения суммы денег, выплаченных сверх кредита в счет уплаты процентов, удобно использовать формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии.

При решении таких задач удобно использовать следующую таблицу.

Таблица 2

№ месяца (года)	Выплата по основному долгу	Выплата по процентам
1	$\frac{S}{n}$	$S \cdot r$
2	$\frac{S}{n}$	$\frac{n-1}{n} \cdot S \cdot r$
3	$\frac{S}{n}$	$\frac{n-2}{n} \cdot S \cdot r$
…	…	…
n	$\frac{S}{n}$	$\frac{n-(n-1)}{n} \cdot S \cdot r = \frac{1}{n} \cdot S \cdot r$
Итого	P	$S \cdot r \cdot \left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$

Здесь S – сумма кредита; n – количество сроков действия кредита (лет, м

ПРИМЕР 2.

10-го марта клиент взял кредит в банке на следующих условиях:

- срок кредита 24 месяца;

- 1-го числа каждого следующего месяца долг возрастает на 1,2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 9-ое число каждого месяца следует погасить часть долга, так чтобы на 10-ое число каждого месяца долг уменьшался на одну и ту же сумму.

Какая сумма была взята в кредит, если известно, что общая сумму выплат равняется 1,035 млн. рублей?[2].

Решение: Общую сумму выплат можно разделить на две части: основной долг (сумма, взятая в кредит) и выплата по процентам. Причем основной долг разбит на 24 равных платежа. Для наглядности составим таблицу, предварительно обозначив за *x* – сумму, взятую в кредит.

Тогда по условию задачи долг каждый месяц должен уменьшаться ровно на $\frac{x}{24}$ (руб).

Используем для решения задачи таблицу 2.

№ месяца (года)	Выплата по основному долгу	Выплата по процентам
1	$\frac{x}{24}$	$x \cdot 0{,}012$
2	$\frac{x}{24}$	$\frac{23}{24} \cdot x \cdot 0{,}012$
3	$\frac{x}{24}$	$\frac{22}{24} \cdot x \cdot 0{,}012$
…	…	…
24	$\frac{x}{24}$	$\frac{1}{24} \cdot x \cdot 0{,}012$
Итого	x	$x \cdot 0{,}012 \cdot \left(1 + \frac{23}{24} + \frac{22}{24} + \ldots + \frac{1}{24}\right)$

Составим уравнение:

(при этом фиксированную часть долга сложим отдельно, а проценты – отдельно и вынесем общий множитель 0,012)

$$1035000 = x + x \cdot 0{,}012 \cdot \left(1 + \frac{23}{24} + \frac{22}{24} + \ldots + \frac{1}{24}\right),$$

тогда в скобках – сумма n первых членов арифметической прогрессии, в которой: $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{24}$;

$$S = \frac{1 + \frac{1}{24}}{2} \cdot 24 = \frac{25}{2}.$$

$$1035000 = x + \frac{25}{2} x \cdot 0{,}012;$$

$$1035000 = 1{,}15x;$$

$$x = 900000.$$

Ответ: в кредит было взято 900000 рублей.

В рассмотренных примерах показаны основные приемы работы с задачами о кредитах. Замечаем, что использование предложенных таблиц значительно облегчает процесс решения таких задач.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Демонстрационная версия ЕГЭ-2016 по математике. Базовый и профильный уровни [электронный ресурс] // URL: http://www.examen.ru /add/ege/demonstracionnye-varianty-ege.

2. Ларин А.А. Тренировочные варианты ЕГЭ по математике. Базовый и профильный уровни [электронный ресурс] // URL: http://alexlarin.net/ege15.html.