В. А. Городницкий

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

В настоящее время содержание школьного курса математики не соответствует правилам, появившимся в современных условиях. Объем знаний, нужный учащимся, энергично возрастает, в то время как отводимые часы для этих знаний сокращаются. Для решения этой проблемы существуют такие средства как переход школы на профильное обучение и введение элективных курсов.

Элективные курсы - необходимые для посещения курсы по выбору для учеников.

Элективные курсы связаны с удовлетворением персональных образовательных интересов, предрасположенностей и необходимостей каждого школьника.

Практическая значимость проектирования элективного курса «Функциональные уравнения», заключается в том, что по этой теме очень мало методической литературы и методы решения функциональных уравнений довольно редко встречаются в книгах по математическому анализу, в этом случаи, материалы, предложенные в выпускной квалификационной работе (ВКР), могут использоваться школьниками, студентами и учителями.

В каждом пункте, предназначенном отдельному методу решения функциональных уравнений, приведены образцы решения. Подобраны разные задачи по данной теме, которые могут быть полезны при подготовке учеников к олимпиадам, при составлении спецкурса, а также при изучении теории функциональных уравнений.

Учебно-тематическое планирование элективного курса «Функциональные уравнения»

Пояснительная записка

Данный элективный курс рассчитан для учеников старших классов, он содержит материал по функциональным уравнениям, используемых при изучении математики и предусмотрен на 34 учебных часа.

Курс состоит из пояснительной записки и трех параграфов. В пояснительной записке содержится методическая часть (примерное поурочно-тематическое планирование, правила к уровню подготовки выпускников, методические рекомендации), необходимая преподавателю.

Учебная часть состоит из трех параграфов, содержащих теорию по определенной теме и несколько примеров.

Материалами курса могут пользоваться как ученики, так и учителя.

Функциональные уравнения являются малоизученным разделом математического анализа. Решение отдельных уравнений требует тонкого понимания основных вопросов анализа и искусного их применения. Изучая функциональные уравнения, ученики могут испытать свои силы в самостоятельной творческой работе. Данные уравнения встречаются на математических олимпиадах, изучение которых не предусмотрено ни программой по математике общеобразовательной средней школы, ни программами математических дисциплин пединститутов. Данный курс знакомит с функциональными уравнениями и их применением.

Курс рассчитан для учеников 10-11 классов, желающих углубленно изучать данный предмет.

Цель элективного курса: рассмотреть основные методы решения функциональных уравнений, привести их обоснование.

Задачи:

- систематизировать сведения о функциональных уравнениях
- рассмотреть основные методы решения функциональных уравнений
- раскрыть роль функциональных уравнений в школе

Учебно-методический комплекс

Наименование тем	Количество часов
I. Основные понятия и факты	**4**
1.1. История возникновения функциональных уравнений. Элементарные факты из начал анализа	1
1.2. Основные понятия теории функциональных уравнений	1
1.3. Сведения из теории дифференциальных уравнений	1
1.4. Контрольная работа	1
II. Методы решения функциональных уравнений	**28**
2.1. Метод подстановок	4
2.2. Дифференцирование функциональных уравнений	4
2.3. Метод предельного перехода	4
2.4. Метод математической индукции	4
2.5. Метод Коши	4
2.6. Метод неопределенных коэффициентов	4
2.7. Контрольная работа	4
III. Функциональные уравнения в школьном курсе математики	**1**
IV. Зачет	**1**

Дифференцирование функциональных уравнений

Пример: [5, С. 38]

Решите уравнение $f(3x+2)=3f(x)$.

Решение: Дифференцируя этой уравнение по x, приходим к функциональному уравнению относительно $f'(x)$: $f'(3x+2)=f'(x)$, которое удобно решать в классе непрерывных функций. Действительно, заменяя $3x+2$ на x, приходим к уравнению $f'(x)=f\left(\frac{x-2}{3}\right)$ и здесь $\varphi(x)=\frac{x-2}{3}$.

Решением этого уравнения является функция $f'(x)=C$, где $C=f(-1)$.

Интегрируя равенство $f'(x)=C$, найдем $f(x)=Cx+C_1$. Подстановка этого решения в уравнение дает $C=C_1$ и, следовательно, $f(x)=C(x+1)$.

Ответ: $f(x)=C(x+1)$.

Метод математической индукции

Пример: [1, С. 202]

Функция $f(n)$ определена для натуральных значений n и удовлетворяет условию $f(n)=f(n-1)+1$. Кроме того, $f(1)=2003$. Найти $f(n)$.

Решение:

По условию задачи имеем n равенств

$f(1)=2003, f(2)=f(1)+1, f(3)=f(2)+1, \ldots, f(n)=f(n-1)+1.$

Сложив почленно все равенства, получим

$(f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1))+f(n)=2003+(f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1))+1+\ldots+1$

или, после приведения подобных членов:

$f(n) = 2003 + 1 \cdot (n-1)$

Ответ: $f(n) = 2002 + n$.

Решение функциональных уравнений методом Коши

Пример: [3, С. 6]

Решите уравнение $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Решение:

Положим $y = x$, $2x$ ..., получим:

$f(2x) = f^2(x)$, $f(3x) = f^3(x)$, …, $f(nx) = f^n(x)$

Справедливость данного равенства легко устанавливается по индукции.

Действительно, считая, что это равенство справедливо для n, для $n+1$ имеем:

$f[(n+1)x] = f(nx+x) = f(nx)f(x) = f^n(x)f(x) = f^{n+1}(x)$.

Таким образом, равенство верно для любых действительных x и произвольного натурального n. Положив в $f(nx) = f^n(x)$ $x = 1$, имеем:

$f(n) = f^n(1)$

Считая $f(1) = c$, имеем для натуральных x $f(x) = c^x$.

Положив в $f(nx) = f^n(x)$ $x = \frac{m}{n}$, получим:

$f(m) = f^n\left(\frac{m}{n}\right) = c^m$, откуда $f\left(\frac{m}{n}\right) = c^{\frac{m}{n}}$.

Таким образом, для рациональных положительных x, решением уравнения будет также $f(x) = c^x$.

Предполагая функцию $f(x)$ непрерывной, получим при $\frac{m}{n} \to x$, $f(x) = c^x$, для положительных иррациональных x решением уравнения есть таким образом $f(x) = c^x$ для положительных действительных x.

Положим теперь в уравнении $x = 0$, получим:

$f(y) = f(0)f(y)$, откуда или $f(y) = 0$ или $f(0) = 1 = c^0$.

Полагая в уравнении $y = -x$, найдем:

$f(0) = f(-x)f(x)$; $1 = f(-x)f(x)$; $f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{c^x} = c^{-x}$.

Итак, для любого действительного x имеем непрерывные решения

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = c^x \end{cases}$$

Ответ: $f(x)=c^x$ и $f(x)=0$ для любого действительного x.

Решение функциональных уравнений методом неопределенных коэффициентов

Пример: [2, С. 62]

Функция $y=f(x)$ при всех x определена, непрерывна и удовлетворяет условию $f(f(x))=f(x)+x$. Найдите две такие функции.

Решение:

Запишем уравнение так: $f(f(x))-f(x)=x$.

Над искомой функцией выполняются два действия – операция составления сложной функции и вычитание. Учитывая, что правая часть уравнения – линейная функция, естественно предположить, что искомая функция тоже линейная: $f(x)=ax+b$, где a и b – неопределенные коэффициенты. Подставив эту функцию в уравнение и выполнив преобразования, получим равенство $(a^2-a)x+ab=x$, которое должно выполняться для всех $x\in R$. Это возможно только тогда, когда

$$\begin{cases} a^2-a=1 \\ ab=0 \end{cases}.$$

Отсюда находим $a=0{,}5(1\pm\sqrt{5})$, $b=0$. Следовательно, имеем две непрерывные функции $f(x)=0{,}5(1\pm\sqrt{5})x$, являющиеся решениями функционального уравнения. Других решений задача не имеет.

Ответ: $f(x)=0{,}5(1\pm\sqrt{5})x$.

Список литературы

1. Азаров А.И. Математика для старшеклассников: Пособие для учащихся/ А.И. Азаров, С.А. Барвенов. – Мн.: Аверсэв, 2004. – 222 с.
2. Вороной А.Н. Функциональные уравнения и метод неопределенных коэффициентов/ А.Н. Вороной // МШ. – 2004, № 8. – с. 62-66.
3. Колягин Ю.М. О функциональных уравнениях/ Ю.М. Колягин // МШ. – 1959, № 5. – с. 4-8.
4. Кондратенко Л. Н. Элективные ориентационные математические курсы в профильной школе. Новокузнецк, 2008. - 119 с.
5. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения: Книга для начинающих изучать функциональные уравнения и преподавателей/ Л.М. Лихтарников. – СПб.: Лань, 1997. – 160с.

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук Куликов Н.А.