

В. А. Городницкий

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

В настоящее время содержание школьного курса математики не соответствует правилам, появившимся в современных условиях. Объем знаний, нужный учащимся, энергично возрастает, в то время как отводимые часы для этих знаний сокращаются. Для решения этой проблемы существуют такие средства как переход школы на профильное обучение и введение элективных курсов.

Элективные курсы - необходимые для посещения курсы по выбору для учеников.

Элективные курсы связаны с удовлетворением персональных образовательных интересов, предрасположенностей и потребностей каждого школьника.

Практическая значимость проектирования элективного курса «Функциональные уравнения», заключается в том, что по этой теме очень мало методической литературы и методы решения функциональных уравнений довольно редко встречаются в книгах по математическому анализу, в этом случае, материалы, предложенные в выпускной квалификационной работе (ВКР), могут использоваться школьниками, студентами и учителями.

В каждом пункте, предназначенном отдельному методу решения функциональных уравнений, приведены образцы решения. Подобраны разные задачи по данной теме, которые могут быть полезны при подготовке учеников к олимпиадам, при составлении спецкурса, а также при изучении теории функциональных уравнений.

Учебно-тематическое планирование элективного курса «Функциональные уравнения»

Пояснительная записка

Данный элективный курс рассчитан для учеников старших классов, он содержит материал по функциональным уравнениям, используемых при изучении математики и предусмотрен на 34 учебных часа.

Курс состоит из пояснительной записки и трех параграфов. В пояснительной записке содержится методическая часть (примерное поурочно-тематическое планирование, правила к уровню подготовки выпускников, методические рекомендации), необходимая преподавателю.

Учебная часть состоит из трех параграфов, содержащих теорию по определенной теме и несколько примеров.

Материалами курса могут пользоваться как ученики, так и учителя.

Функциональные уравнения являются малоизученным разделом математического анализа. Решение отдельных уравнений требует тонкого понимания основных вопросов анализа и искусного их применения. Изучая функциональные уравнения, ученики могут испытать свои силы в самостоятельной творческой работе. Данные уравнения встречаются на математических олимпиадах, изучение которых не предусмотрено ни программой по математике общеобразовательной средней школы, ни программами математических дисциплин пединституты. Данный курс знакомит с функциональными уравнениями и их применением.

Курс рассчитан для учеников 10-11 классов, желающих углубленно изучать данный предмет.

Цель элективного курса: рассмотреть основные методы решения функциональных уравнений, привести их обоснование.

Задачи:

- систематизировать сведения о функциональных уравнениях
- рассмотреть основные методы решения функциональных уравнений
- раскрыть роль функциональных уравнений в школе

Учебно-методический комплекс

Наименование тем	Количество часов
I. Основные понятия и факты	4
1.1. История возникновения функциональных уравнений. Элементарные факты из начал анализа	1
1.2. Основные понятия теории функциональных уравнений	1
1.3. Сведения из теории дифференциальных уравнений	1
1.4. Контрольная работа	1
II. Методы решения функциональных уравнений	28
2.1. Метод подстановок	4
2.2. Дифференцирование функциональных уравнений	4
2.3. Метод предельного перехода	4
2.4. Метод математической индукции	4
2.5. Метод Коши	4
2.6. Метод неопределенных коэффициентов	4
2.7. Контрольная работа	4
III. Функциональные уравнения в школьном курсе математики	1
IV. Зачет	1

Дифференцирование функциональных уравнений

Пример: [5, С. 38]

Решите уравнение $f(3x+2) = 3f(x)$.

Решение: Дифференцируя это уравнение по x , приходим к функциональному уравнению относительно $f'(x)$: $f'(3x+2) = f'(x)$, которое удобно решать в классе непрерывных функций. Действительно, заменяя $3x+2$ на x , приходим к уравнению

$$f'(x) = f'\left(\frac{x-2}{3}\right) \text{ и здесь } \varphi(x) = \frac{x-2}{3}.$$

Решением этого уравнения является функция $f'(x) = C$, где $C = f'(-1)$.

Интегрируя равенство $f'(x) = C$, найдем $f(x) = Cx + C_1$. Подстановка этого решения в уравнение дает $C = C_1$ и, следовательно, $f(x) = C(x+1)$.

Ответ: $f(x) = C(x+1)$.

Метод математической индукции

Пример: [1, С. 202]

Функция $f(n)$ определена для натуральных значений n и удовлетворяет условию $f(n) = f(n-1) + 1$. Кроме того, $f(1) = 2003$. Найти $f(n)$.

Решение:

По условию задачи имеем n равенств

$$f(1) = 2003, f(2) = f(1) + 1, f(3) = f(2) + 1, \dots, f(n) = f(n-1) + 1.$$

Сложив почленно все равенства, получим

$$(f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)) + f(n) = 2003 + (f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)) + 1 + 1 + \dots + 1$$

или, после приведения подобных членов:

$$f(n) = 2003 + 1 \cdot (n-1)$$

Ответ: $f(n) = 2002 + n$.

Решение функциональных уравнений методом Коши

Пример: [3, С. 6]

Решите уравнение $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Решение:

Положим $y = x, 2x, \dots$, получим:

$$f(2x) = f^2(x), \quad f(3x) = f^3(x), \quad \dots, \quad f(nx) = f^n(x)$$

Справедливость данного равенства легко устанавливается по индукции.

Действительно, считая, что это равенство справедливо для n , для $n+1$ имеем:

$$f[(n+1)x] = f(nx+x) = f(nx)f(x) = f^n(x)f(x) = f^{n+1}(x).$$

Таким образом, равенство верно для любых действительных x и произвольного натурального n . Положив в $f(nx) = f^n(x)$ $x=1$, имеем:

$$f(n) = f^n(1)$$

Считая $f(1) = c$, имеем для натуральных x $f(x) = c^x$.

Положив в $f(nx) = f^n(x)$ $x = \frac{m}{n}$, получим:

$$f(m) = f^n\left(\frac{m}{n}\right) = c^m, \quad \text{откуда} \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = c^{\frac{m}{n}}.$$

Таким образом, для рациональных положительных x , решением уравнения будет также $f(x) = c^x$.

Предполагая функцию $f(x)$ непрерывной, получим при $\frac{m}{n} \rightarrow x$, $f(x) = c^x$, для положительных иррациональных x решением уравнения есть таким образом $f(x) = c^x$ для положительных действительных x .

Положим теперь в уравнении $x=0$, получим:

$$f(y) = f(0)f(y), \quad \text{откуда или} \quad f(y) = 0 \quad \text{или} \quad f(0) = 1 = c^0.$$

Полагая в уравнении $y = -x$, найдем:

$$f(0) = f(-x)f(x); \quad 1 = f(-x)f(x); \quad f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{c^x} = c^{-x}.$$

Итак, для любого действительного x имеем непрерывные решения

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = c^x \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = c^x$ и $f(x) = 0$ для любого действительного x .

Решение функциональных уравнений методом неопределенных коэффициентов

Пример: [2, С. 62]

Функция $y = f(x)$ при всех x определена, непрерывна и удовлетворяет условию $f(f(x)) = f(x) + x$. Найдите две такие функции.

Решение:

Запишем уравнение так: $f(f(x)) - f(x) = x$.

Над искомой функцией выполняются два действия – операция составления сложной функции и вычитание. Учитывая, что правая часть уравнения – линейная функция, естественно предположить, что искомая функция тоже линейная: $f(x) = ax + b$, где a и b – неопределенные коэффициенты. Подставив эту функцию в уравнение и выполнив преобразования, получим равенство $(a^2 - a)x + ab = x$, которое должно выполняться для всех $x \in \mathbb{R}$. Это возможно только тогда, когда

$$\begin{cases} a^2 - a = 1 \\ ab = 0 \end{cases}.$$

Отсюда находим $a = 0,5(1 \pm \sqrt{5})$, $b = 0$. Следовательно, имеем две непрерывные функции $f(x) = 0,5(1 \pm \sqrt{5})x$, являющиеся решениями функционального уравнения. Других решений задача не имеет.

Ответ: $f(x) = 0,5(1 \pm \sqrt{5})x$.

Список литературы

1. Азаров А.И. Математика для старшеклассников: Пособие для учащихся/ А.И. Азаров, С.А. Барвенков. – Мн.: Аверсэв, 2004. – 222 с.
2. Вороной А.Н. Функциональные уравнения и метод неопределенных коэффициентов/ А.Н. Вороной // МШ. – 2004, № 8. – с. 62-66.
3. Колягин Ю.М. О функциональных уравнениях/ Ю.М. Колягин // МШ. – 1959, № 5. – с. 4-8.
4. Кондратенко Л. Н. Элективные ориентационные математические курсы в профильной школе. Новокузнецк, 2008. - 119 с.
5. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения: Книга для начинающих изучать функциональные уравнения и преподавателей/ Л.М. Лихтарников. – СПб.: Лань, 1997. – 160с.

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук Куликов Н.А.