О. В. Рединская

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В КУРСЕ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

В современных школах учащиеся имеют возможность получить представления о таких понятиях, относящихся к развитию производства и науки, как «оптимальность», «наилучшее», «наибольшее», «наименьшее», «экстремум» и т.д. С данными понятиями школьники знакомятся через задачи на экстремум.

Экстремальной задачей называется задача на нахождение наибольшего и наименьшего значения. Экстремальные задачи играют большую роль не только в математике, но и в ее приложениях.

Анализ научно-методической литературы позволяет выделить 4 метода решения экстремальных задач [1]. Это такие методы, как:

1. Метод оценки;
2. Метод перебора;
3. Метод опорной функции;
4. Метод преобразования плоскости.

1. Метод оценки. Суть метода состоит в следующем:

Рассматривается конкретное выражение (или определенная геометрическая фигура F), выделяется одна или несколько величин, характеризующие данные выражения (либо фигуру F). Требуется оценить выделенную величину или совокупность величин, т. е. доказать, что величина z удовлетворяет одному из неравенств вида

$$z \leq M \text{ или } z \geq m, \qquad (1),$$

где M и m определяются условиями задачи.

Для решения задачи требуется установить справедливость одного из неравенств (1). Заключительным этапом решения задачи является определение экстремальных значений
M и m.

Рассмотрим пример экстремальной задачи из тренировочного теста ОГЭ по математике (задача С3) с использованием метода оценки [5]:

Найдите наименьшее значение выражения $(5x-4y+3)^2+(3x-y-1)^2$ *и значения* x *и* y*, при которых оно достигается.*

При решении данной задачи, ученики должны прийти к выводу, что при любых значениях x и y имеем $(5x-4y+3)^2+(3x-y-1)^2 \geq 0$ и наименьшее значение, которое может принимать сумма квадратов, равно 0. Это и является ответом на нахождение наименьшего значения.

Также следует учесть, что значение, равное 0, достигается только в том случае, когда
$5x-4y+3$ и $3x-y-1$ равны нулю одновременно.
Составив систему уравнений

$$\begin{cases} 5x-4y+3=0, \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$$

и решив ее, получаем $x=1$, $y=2$.
Таким образом, наименьшее значение выражения равно 0, оно достигается при $x=1$, $y=2$.
2. Метод перебора- является одним из самых простых методов решения задач, в которых искомая величина принимает только целочисленные значения.

Сущность данного метода заключается в следующем:

1. Рассмотреть все возможные случаи;
2. Найти все случаи, удовлетворяющие условию данной задачи;
3. Показать, что других решений данной задачи нет.

Задача: *Одна сторона прямоугольника на 3 см больше другой, а его площадь больше 70 см². Какую длину может иметь меньшая сторона прямоугольника [2]?*

Для начала целесообразно задать следующие вопросы:

- Какую величину мы оптимизируем?
- Какие значения может принимать сторона прямоугольника?
- Как найти площадь прямоугольника?

В данной задаче следует наименьшую (в нашем случае оптимизируемую величину) сторону прямоугольника обозначить за независимую переменную *x*, а вторую сторону выразить через меньшую. В итоге приходим к формуле площади прямоугольника, вычисляемой как: $x \cdot (x + 3)$. По условию задачи площадь должна быть больше 70 см², т. е. $x \cdot (x + 3) > 70$. Данное неравенство рекомендуется решить методом интервалов, разложим при этом его на простые множители. Решая квадратное неравенство, учащиеся приходят к множеству решений для переменной *x*: $x \in (-\infty; -10) \cup (7; +\infty)$.

Здесь на помощь приходит вывод о сторонах прямоугольника о том, что они не могут быть отрицательными числами. В итоге получаем, что наименьшая сторона удовлетворяет второму интервалу $(7; +\infty)$, значит наименьшая сторона прямоугольника больше 7 см.

3.Метод опорных функций.

Чаще всего этот метод используется при решении задач на геометрические экстремумы, если условие задачи получается формализовать, т. е. свести её к исследованию формулы. Решение геометрических задач на нахождение экстремального значения геометрической величины чаще всего сводится к исследованию опорных функций вида

$f(x) = ax^2 + вx + c$. Иногда бывает, что решение таких задач методом опорной функции сводится к использованию нескольких вспомогательных теорем (формул), таких как: теорема синусов, теорема косинусов; формулы для вычисления площадей и др.[1].

Рассмотрим на примере использование данного метода.

Задача: *В данный круг вписать прямоугольник наибольшей площади [4].*

Обозначим через *R* радиус круга, а через *x* сторону АВ искомого прямоугольника (Рис.2).

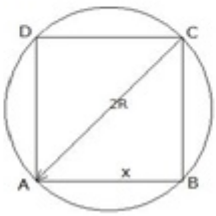

Рисунок 2.

В данной задаче вспомогательной теоремой является теорема Пифагора. Получаем, BC=$\sqrt{4R^2 - x^2}$, откуда для интересующей нас площади S получим выражение: S=x*$\sqrt{4R^2 - x^2}$. Эта функция достигает своего наибольшего значения при том же x, что и функция y=S^2, но $y = x^2 * (4R^2 - x^2)$. Введем новую переменную z=x^2. В итоге получаем: $y = z * (4R^2 - z) = -z^2 + 4R^2 z$, значит y_{max} достигается при $z = 2R^2$, т.е. при $x = R\sqrt{2}$. Заметим, что при AB=$x = R\sqrt{2}$ будет BC$R\sqrt{2}$. Следовательно, искомый прямоугольник должен быть квадратом.

4. Метод преобразования плоскости.

Метод преобразования плоскости используется при решении геометрических экстремальных задач. Суть метода заключается в следующем.

Пусть нам нужно найти экстремум элемента x фигуры F, однозначно определенного элементами x, m_i,i = 1,2,...,n.

Нахождение x экстремума состоит в следующем:

1. Элементу x задаем определенное значение x = C и решим задачу на построение фигуры F по заданным элементам x и m_i.
2. После решения задачи, считаем, что элемент x является перемещением. Затем, применяя один из методов преобразования плоскости, замечаем особенности, возникающие при достижении элементом x максимального или минимального значения.

Именно выделение особенностей помогает сделать вывод об экстремуме элемента x фигуры F [3]. К методам преобразования плоскости относятся: осевая симметрия, параллельный перенос, поворот плоскости вокруг точки, метод подобия.

Задача : *Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг, найдите прямоугольник наибольшей площади [4].*

Решим данную задачу методом преобразования плоскости, а именно: достроим полуокружность до окружности, используя осевую симметрию.

Рассмотрим $ABCD$– прямоугольник, вписанный в полуокружность, KP–диаметр окружности (Рис.3).

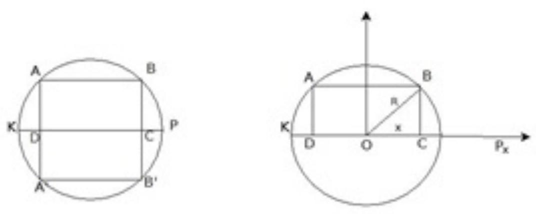

Рисунок 3.

Построим образ данной полуокружности относительно диаметра. Объединение данной полуокружности и её образа при осевой симметрии относительно KP– окружность. В эту окружность вписан прямоугольник $AA'B'B$; $A'B = Z_{KP}(AB)$. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна половине площади прямоугольника $AA'B'B$. Отсюда следует, что площадь $ADCD$максимальна тогда и только тогда, когда площадь $AA'B'B$максимальна. Следует вспомнить, какой прямоугольник вписанный в круг имеет наибольшую площадь (или воспользоваться предыдущей задачей №3).

Наибольшую площадь имеет квадрат. Тогда длина прямоугольника – $2x$, ширина – x. Отсюда имеем: отношение сторон прямоугольника - 2:1, а его площадь равна R^2, где R– радиус данной полуокружности.

Ответ: прямоугольник, отношение сторон которого 2:1.

Решение экстремальных задач способствует углублению и обогащению математических знаний учащихся. Через эти задачи они знакомятся с экстремальными свойствами изучаемых функций, с некоторыми свойствами неравенств. Изучая свойства геометрических фигур, учащиеся приобретают знания об экстремальных свойствах той или иной фигуры, а также учатся применять их к решению прикладных задач.

В данной статье были рассмотрены 4 основных метода решения экстремальных задач в курсе основной школы на примере задач, встречающихся на уроках алгебры и геометрии, а также на факультативных занятиях и заданиях ОГЭ.

Список литературы

1. Возняк Г.М. Прикладные задачи на экстремумы. / Г.М. Возняк, В. А. Гусев. – М.: Просвещение, 1985. – 143 с.
2. Мордкович А.Г. Алгебра 8 класс: Задачник. Часть 2./А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова. – 12- е изд. –– М.: Мнемозина, 2010. –271 с.
3. Нагибин Ф.Ф. Экстремумы: Пособие для учащихся старших классов. / Ф.Ф. Нагибин. – М.: Просвещение, 1966. –121 с.
4. Натансон И.П. Простейшие задачи на максимум и минимум. / И.П. Натансон. –М.:Гос. Изд-во технико- теоретической литературы, 1950. – 32 с.
5. Решу ОГЭ: образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://math.oge.sdamgia.ru/test?theme=89

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук Фураев В.З.