

УДК 371.279.6:51

А. И. Тимофеева, А. В. Фомина

Тимофеева Анастасия Игоревна, студентка 5 курса ФМиТЭФ НФИ КемГУ, г. Новокузнецк.

Фомина Анжелла Владимировна, кандидат физ.-мат. наук, доцент, НФИ КемГУ, г. Новокузнецк.

УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ В ЗАДАНИЯХ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. *Тема, затронутая в статье, касается решения уравнений с параметром различных видов. Рассмотрены два метода реализации решения уравнений с параметром. Разработаны тренировочные задания уравнений с параметром для подготовки к ЕГЭ по математике.*

Ключевые слова: *параметр, уравнения с параметром, виды уравнений, аналитический метод, графический метод.*

На сегодняшний день задачи с параметрами – неотъемлемая часть ЕГЭ по математике. Уравнения с параметром являются заданиями повышенного уровня сложности в системе заданий ЕГЭ по математике. За правильное решение этого задания можно заработать 4 балла. Система тренировочных заданий, разработанная авторами, направлена на овладение учащимися основными методами и приемами решения уравнений и неравенств с параметрами, подготовку учащихся к успешной сдаче ЕГЭ по математике.

Методы решения уравнений с параметром

«Уравнение с параметром – это целое семейство уравнений, получаемых при подстановке конкретных значений a . Решить уравнение с параметром означает выяснить, при каких значениях параметра решения вообще существуют, сколько их, и в случае их существования дать формулы решения, т. е. выразить x через параметры» [2].

I. Аналитический метод решения уравнений с параметром

Для того чтобы решить уравнение с параметром аналитическим методом, необходимо выполнить две задачи:

1. исследовать, при каких значениях параметров уравнение имеет корни и сколько их при разных значениях параметров;
2. найти все выражения для корней и указать для каждого из них те значения параметров, при которых это выражение действительно определяет корень уравнения [3; 4].

II. Графический метод решения уравнений с параметром

Можно выделить два основных графических приёма: первый – интерпретация задачи в плоскости $(x; y)$, второй — в плоскости $(x; a)$.

Авторами рассматривались следующие виды уравнений с параметром, встречающиеся на ЕГЭ по математике: линейные уравнения с параметром; квадратные уравнения с параметром; уравнения с параметром, содержащие модуль; иррациональные уравнения с параметром; показательные уравнения с параметром; логарифмические уравнения с параметром; тригонометрические уравнения с параметром.

На каждый из видов уравнений с параметром был подобран и решен пример двумя методами: аналитическим и графическим.

В качестве примера рассмотрим уравнение с параметром, содержащее модуль.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

И рассмотрим возможное число корней уравнения $|x| = a$, зависящее от параметра a .

При $a > 0$ уравнение имеет два корня.

При $a = 0$ уравнение имеет единственный корень.

При $a < 0$ уравнение не имеет корней [3; 4].

В качестве примера приведем решение задания из сборника «ЕГЭ. Математика. Профильный уровень» под ред. И. В. Ященко 2016 г. [1].

Пример. Найдите все значения параметра a , при которых любое число из отрезка $2 \leq x \leq 3$ является решением уравнения $|x-a-2|+|x+a+3| = 2a+5$.

Решение:

Сначала решим уравнение аналитическим методом.

Рассмотрим три случая:

1. Пусть $2a+5 < 0$, тогда уравнение решений не имеет.
2. Пусть $2a+5 = 0$, следовательно $a = -2,5$. $|x+0,5|+|x+0,5| = 0$. Ни одно число отрезка $[2; 3]$ не является его решением.
3. Пусть $2a+5 > 0$, тогда $a > -2,5$.

Запишем исходное уравнение в виде: $|x-(a+2)|+|x-(-a-3)| = 2a+5$. Подставляя любые значения больше $-2,5$ вместо a , отметим следующее верное неравенство $-a-3 < a+2$. Откуда и вытекает, что любое число из отрезка $[-a-3; a+2]$ является решением неравенства. Необходимо найти значения a , при каждом из которых отрезок $[-a-3; a+2]$ содержит отрезок $[2; 3]$. Значения параметра a найдем из системы:

$$\begin{cases} -a - 3 \leq 2, \\ a + 2 \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq -5, \\ a \geq 1. \end{cases}$$

Ответ: $a \geq 1$.

Рассмотрим графический метод решения уравнения.

Построим два графика в зависимости от значений параметра a : $f_1(x) = 2a + 5$ и $f_2(x) = |x - a - 2| + |x + a + 3|$.

1) Построим графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $a < -2,5$ (рис. 1).

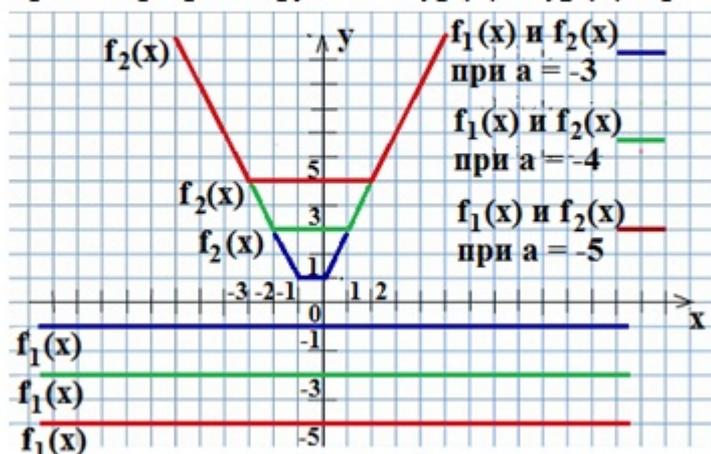


Рис. 1. Графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $a < -2,5$

Следовательно, решений нет.

2) Построим графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $a = -2,5$ (рис. 2).

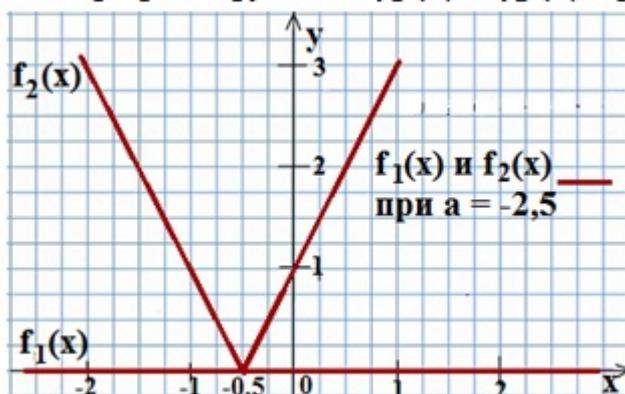


Рис. 2. Графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $a = -2,5$

Заметим, что решением уравнения является $x = -0,5$, но это значение не принадлежит отрезку $[2; 3]$.

3) Построим графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $a > -2,5$ (рис. 3).

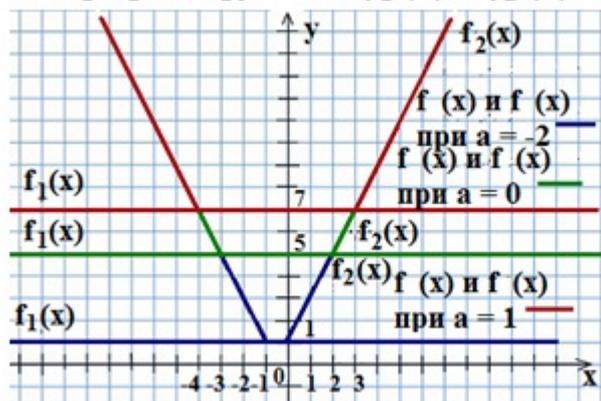


Рис. 3. Графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $a > -2,5$

По рисунку 3 видно, что любое число из отрезка $2 \leq x \leq 3$ является решением уравнения в том случае, если выполняются равенства $f_2(2) = f_2(3) = 2a + 5$. Решая систему уравнений с модулем, получаем, что значения a будут больше или равны единице.

Ответ: $a \geq 1$.

Авторами были рассмотрены различные виды уравнений с параметром и методы их решения. Разработана система тренировочных заданий по теме «Уравнения с параметром» для подготовки к ЕГЭ по математике, в которой подобраны уравнения с параметром различных видов для самостоятельного решения с ответами.

Список литературы

1. Гуцин, Д. Д. «Решу ЕГЭ»: математика. Обучающая система Дмитрия Гуцина [Электронный ресурс] / Д. Д. Гуцин. – Режим доступа : <https://ege.sdamgia.ru/test?theme=219>
2. Пратусевич, М. Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс [Текст] : учеб. для общеобразовательных учреждений: профильный уровень / М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. – Москва : Просвещение, 2010. – 463 с.
3. Фальке, Л. Я. Изучение сложных тем курса алгебры в средней школе [Текст] : учеб.-метод. материалы по математике / Л. Я. Фальке, под ред. Л. Я. Фальке. – Изд. 2-е. – Москва : Народное образование ; Илекса ; Ставрополь : Сервис школа, 2004. – 120 с.
4. Ястребинецкий, Г. А. Задачи с параметрами [Текст] : книга для учителя. – Москва : Просвещение, 1986. – 128 с.