

УДК 372.851

Д. С. Зеленин

*Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
Лесоперевалочной СОШ №2, с. Бельтирское, Аскизский район.*

ЧЕТЫРЕ СПОСОБА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Аннотация. Тема, затронутая в статье, касается решения несколькими способами уравнения с параметром, направленная на личностное развитие учащихся. Рассмотрены этапы реализации образовательного проекта и, следуя этим этапам, разработан проект по математике для учащихся 9 классов на тему «Четыре способа решения одной задачи с параметром».

Определить число решений уравнения $|x+2| = a x + 1$ в зависимости от значения параметра a .

I способ (аналитический).

Уравнение $|x+2| = a x + 1$ определено при любом действительном значении параметра a и равносильно следующим системам:

$$1. \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x+2 = a \cdot x+1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ x \cdot (1-a) = a \cdot x+1; \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} x \geq -2, \\ a = 1, \\ x \cdot (1-a) = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ a = 1, \\ x \cdot (1-1) = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ a = 1, \\ x \cdot 0 = -1; \end{cases}$$

Решений нет.

$$2) \begin{cases} x \geq -2, \\ a \neq 1, \\ x = 1/(a-1); \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2.1 \quad & 1/(a-1) \geq -2, \\ & 1/(a-1)+2 \geq 0, \\ & 1/(2a-2) \geq 0, \\ & (2a-1)/(a-1) \geq 0, \\ & \begin{cases} 2a-1 \geq 0, \\ a-1 > 0; \end{cases} \\ & \begin{cases} a \geq 1/2, \\ a > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

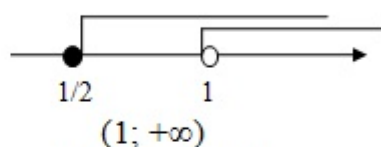


Рис. 1. График 1

$$\begin{aligned} 2.2 \quad & \begin{cases} 2a-1 \leq 0, \\ a-1 < 0; \end{cases} \\ & \begin{cases} a \leq 1/2, \\ a < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

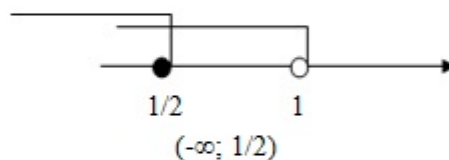


Рис. 2. График 2

Ответ: при $a \in (-\infty; 1/2) \cup (1; +\infty)$; $x = 1/(a-1)$.

$$2. \begin{cases} x+2 < 0, \\ -x-2 = a \cdot x+1; \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая:

$$1. \begin{cases} a = -1, \\ x < -2, \\ x \cdot (-1+1) = -3; \end{cases}$$

Д. С. Зеленин 2017-16-27

$$\begin{cases} x < -2, \\ x \cdot 0 = -3; \end{cases}$$

Решений нет.

При $-1 < a < 1/2$ уравнение имеет два корня $x_1 = 1/(a-1)$ и $x_2 = -3/(a+1)$.

Если $a = 1/2$, то $x_1 = x_2 = -2$.

Если $a \leq -1$, или $a = 0,5$ или $a > 1$, то $x = 1/(a-1)$ - одно решение.

Если $0,5 < a \leq 1$, то уравнение не имеет решений.

Интересный способ, но важно рассмотреть все случаи.

II способ (использование координатной плоскости $(x; a)$) (рис. 5)

1. Пусть $x=0$, тогда $|0+2| = a \cdot 0 + 1$, получаем $2=1$ - неверно, решений нет.

При любом значении параметра a значение $x=0$ не является конем уравнения $|x+2| = a x + 1$.

2. Пусть $x \neq 0$, тогда $a = (-1 + |x+2|)/x$

Если $x \geq -2$, то $a = (-1 + x + 2)/x = (x+1)/x = 1 + 1/x$

$a = 1 + 1/x$. Построим таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Зависимость параметров x и a

x	-2	-1	-1/2	1	2	3
a	0,5	5	-1	2	1,5	4/3

Если $x < -2$, то $a = (-1 - x - 2)/x = (-x-3)/x = -1 - 3/x$.

$a = -1 - 3/x$. Построим таблицу (табл. 2)

Таблица 2

Зависимость параметров x и a

x	-5	-4	-3	-2
a	-2/5	-1/4	0	0,5

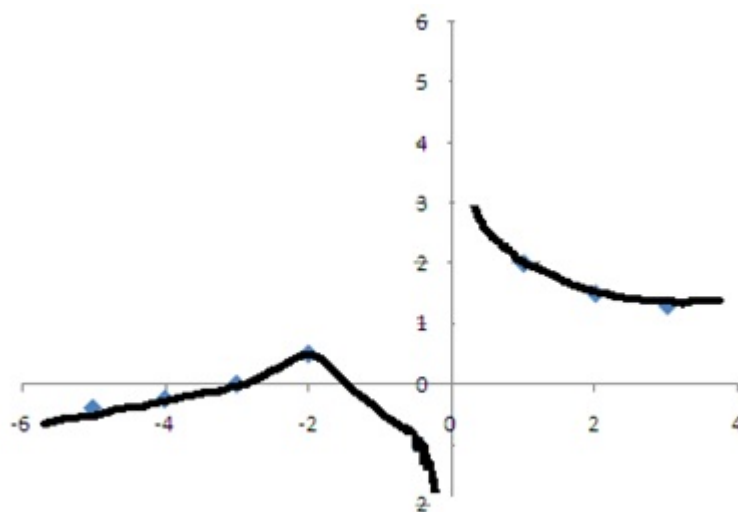


Рис. 5. Графический способ решения

На рисунке 5 мы видим, что при $a > 1$, $a = 1/2$, $a \leq -1$ – уравнение имеет одно решение.

При $-1 < a < 1/2$ – два решения и при $1/2 < a \leq 1$ – решений нет.

Быстро, просто, доступно на экзамене.

III способ (поворот прямой).

Построим графики функций $y = |x+2|$ и $y = ax+1$ (рис. 6).

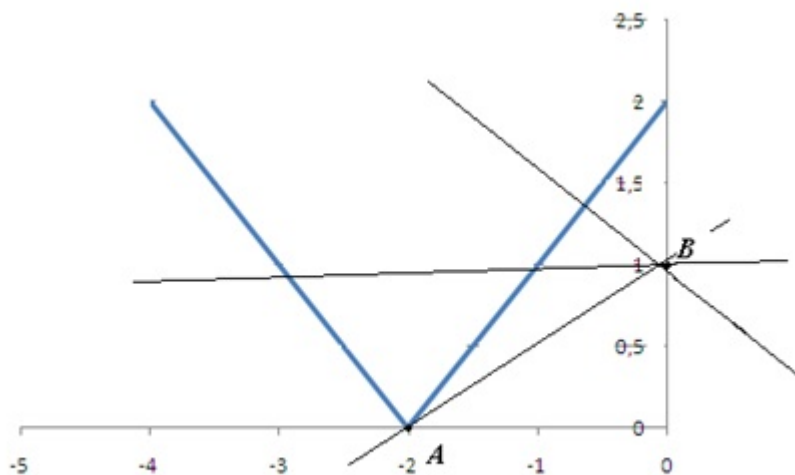


Рис. 6. Графики функций $y = |x+2|$ и $y = ax+1$

$y = |x+2|$ – графиком является угол, вершина которого находится в точке $A(-2; 0)$.

Функция $y = ax+1$ – семейство прямых, каждая из которых проходит через точку $B(0;1)$, т.е. прямые вращаются вокруг точки

Если прямая $y = ax+1$ параллельна прямой $y = x+2$, то графики функций $y = |x+2|$ и $y = ax+1$ общих точек не имеют, следовательно уравнение не имеет решений.

Если $a > 1$, то прямая $y = ax + 1$ будет поворачиваться против часовой стрелки и обязательно пересечется с прямой $y = x + 2$. следовательно, уравнение имеет единственное решение.

Продолжим поворачивать прямую по часовой стрелке. Прямая $y = ax + 1$ пересекает обе стороны угла $y = |x + 2|$ до тех пор, пока не станет параллельна прямой $y = -x - 2$. Тогда получаем $a = -1$. Следовательно, при $-1 < a < 1/2$ уравнение имеет два решения, а при $a = -1$ – одно решение. При дальнейшем уменьшении значения параметра a , будет пересекать только одну сторону угла, следовательно, уравнение будет иметь только одно решение.

Этот способ в школе не рассматривается и поэтому интересен, но сложен, требуется терпения и понимания.

IV способ (параллельный перенос).

Построим графики функций $y_1 = ||2x| - 1|$ (рис. 7).

Таблица 3

Зависимость y от x

x	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2
y	3	1	0	1	0	1	3

$y_2 = x - a$ – семейство прямых.

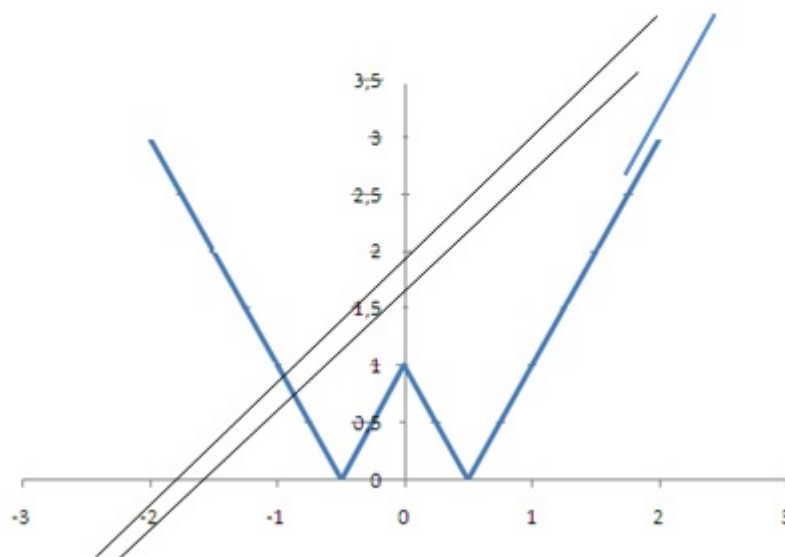


Рис. 7. Семейство графиков функций

График функции $y_1 = ||2x| - 1|$ касается оси Ox в точках $A(-0,5; 0)$ и $B(0,5; 0)$.

Прямая $y_2 = x - a$ имеет ровно три точки пересечения с графиком функции y_1 тогда и только тогда, когда она проходит через точку A или точку $C(0; 1)$. Во всех остальных случаях количество точек пересечения графиков функций $y_1 = ||2x| - 1|$ и $y_2 = x - a$ будет или больше, или меньше трех. Найдем значения параметра a в первом и втором случаях.

Пусть прямая $y^2 = x - a$ проходит через точку А, тогда $0 = -1/2 - a$, значит $a = 1/2$.

Если прямая $y^2 = x - a$ проходит через точку С, то $a = -1$. $a = -1/2$ или $a = -1$.

Способ легкий и его можно применять на ОГЭ.

Список литературы

1. Мордкович, А. Г. Алгебра, 9 класс. В 2-х томах [Текст]. / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев, Л. И. Звавич [и др.]. – М.: Мнемозина. – 2015. – 509 с.
2. Открытый урок [Электронный ресурс]. – Первое сентября. – Режим доступа : <http://festival.1september.ru/>
3. Теорема [Электронный ресурс]. – Википедия: свободная энциклопедия. – Режим доступа : <http://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема>

*Научный руководитель: учитель математики
Сафьянова С. В.*