

И. Г. Маланьина

Научный руководитель: Фураев Валерий Зиновьевич.

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения

$$u_t = \alpha \cdot (u^2)_{xx} + u_{txx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (1)$$

с неоднородными граничными условиями

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t + \alpha \cdot u^2) \Big|_{x=0} = d, \quad u(1, t) = H, \quad (2)$$

где $H \geq 0, t \geq 0, \alpha > 0; b, d, \alpha - const.$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad u_0(1) = H. \quad (3)$$

Введем функцию

$$v = u_t + \alpha \cdot u^2.$$

И записываем уравнение (1) в виде

$$v - v_{xx} = \alpha \cdot u^2, \quad (4)$$

Вводя функцию Грина $G(x, y)$ для оператора $L = 1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ с нулевыми условиями на концах отрезка $[0, 1]$, из (4) получим:

$$u_t(x, t) + \alpha \cdot u^2(x, t) = \alpha \int_0^1 G(x, y) u^2(y, t) dy + \alpha H^2 \frac{chx}{ch1} - d \frac{sh(1-x)}{ch1}, \quad (5)$$

где

$$G(x, y) = \frac{1}{ch1} \begin{cases} chx \cdot sh(1-y), & 0 \leq x \leq y, \\ chy \cdot sh(1-x), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Если начальная функция $u_0(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[0, 1]$ то задача (5), (3) однозначно разрешима в целом, т. е. на отрезке $[0, T]$ для любого $T > 0$ [1. С. 2014 - 2015].

Таким образом, данная смешанная начально-краевая задача сводится к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения (5) с начальным условием (3).

Решение данной задачи может быть найдено методом Эйлера, по формуле:

$$u_{k+1} = u_k - \left(\alpha \cdot \left(u_k^2 - \int_0^1 G(x, y) u_k^2(y) dy \right) - \alpha \cdot H^2 \frac{chx}{ch1} + d \frac{sh(1-x)}{ch1} \right) \cdot \Delta t,$$

где $u_k = u(x, t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Для численного решения задачи интеграл в правой части по пространственной переменной y вычисляется по формуле прямоугольников [2. С. 24 - 26]:

$$\int_0^1 G(x, y) u_k^2(y) dy = \sum_{k=1}^n G_k \cdot u_k^2 \cdot h.$$

Рассмотрим случай непроницаемости левой границы области фильтрации, т.е. при $d=0$ при этом уравнение (5) примет вид:

$$u_t(x, t) + \alpha \cdot u^2(x, t) = \alpha \cdot \int_0^1 G(x, y) \cdot u^2(y, t) dy + \frac{chx}{ch1} \cdot \alpha \cdot H^2.$$

При $t \rightarrow \infty$ решение этого уравнения равномерно по $x \in [0, 1]$ сходится к H -уровню жидкости вне области фильтрации на правой границе.

Приведем пример решения смешанной краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска с использованием пакета MathCad:

Пусть начальная функция $u_0(x)$ задается в 5 точках и затем интерполируется кубическими сплайнами:

$$x1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.5 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y1 := \begin{pmatrix} A \\ 6 \\ 3 \\ 12 \\ B \end{pmatrix} \quad v(x) := \text{interp}(\text{cspline}(x1, y1), x1, y1, x)$$

$$\alpha \equiv 1 \quad A \equiv 2 \quad B \equiv 6 \quad L \equiv 1 \quad H \equiv 6 \quad d \equiv 0$$

$$G1(y, x) := \cosh(y) \cdot \sinh(L - x) \quad G2(x, y) := \cosh(x) \cdot \sinh(L - y)$$

$$N := 300 \quad h := \frac{L}{N} \quad M := 501 \quad k := 0..M-1 \quad DT := 0.005 \quad \text{шаг по } t$$

$$i := 0..N \quad j := 0..N \quad N - \text{число шагов по координате } x, \quad M - \text{по времени } t$$

$$X(i) := i \cdot h \quad Y(j) := j \cdot h \quad G1_{j,i} := G1(Y(j), X(i)) \quad G2_{i,j} := G2(X(i), Y(j))$$

$$G_{i,j} := \begin{cases} \frac{G2_{i,j}}{\sinh(L)} & \text{if } i \leq j \\ \frac{G1_{j,i}}{\sinh(L)} & \text{if } j \leq i \end{cases} \quad u_{0,j} := v(X(j))$$

$$u_{k+1,i} := u_{k,i} - \left[\left[(u_{k,i})^2 - \sum_{j=0}^N [G_{i,j} \cdot (u_{k,j})^2] h \right] \alpha + \frac{\sinh(L - i \cdot h) \cdot d}{\cosh(L)} - \frac{\cosh(i \cdot h) \cdot \alpha \cdot H^2}{\cosh(L)} \right] \cdot DT$$

На рис. 1 изображена деформация формы свободной поверхности в случае непроницаемости левой границы области фильтрации и при заданном уровне жидкости на правой границе:

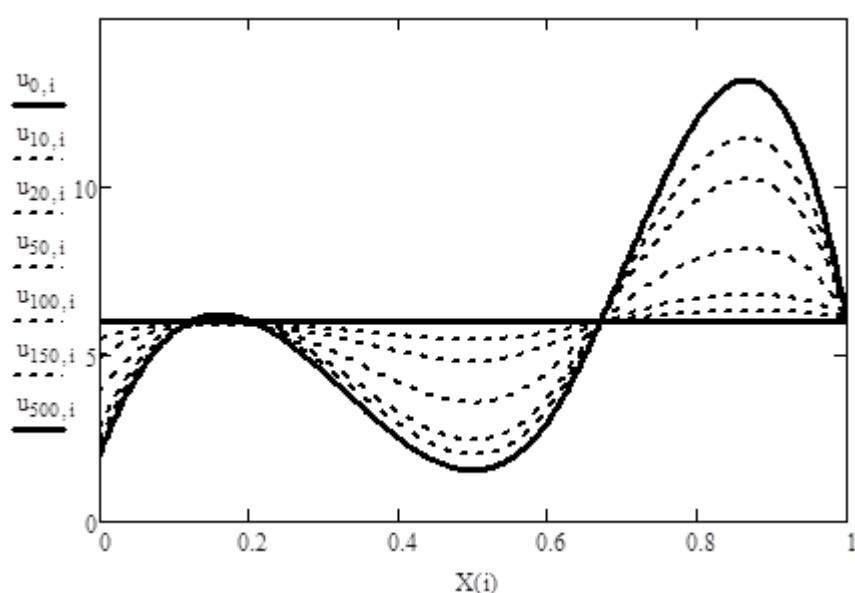


Рис. 1

Здесь жирные сплошные линии – начальная (при $t=0$) и конечная (по истечении большого промежутка времени t) формы свободной поверхности фильтрующейся жидкости соответственно, остальные – ее промежуточные формы. Из рисунка видно, что начальная форма поверхности с течением времени сходится к константе, которая равна заданному уровню жидкости на правой границе области фильтрации. В данном примере $N=6$.

Исходя из анализа расчетов и графических представлений движения жидкости со свободной поверхностью в случае непроницаемости левой границы области фильтрации и заданном уровне жидкости на правой границе заметили, что решение интегро – дифференциального уравнения (5) равномерно сходится по x к константе, значение которой равно уровню жидкости H на правой границе области фильтрации.

Библиографический список

1. Фураев В. З. О разрешимости в целом первой краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска. // Дифференциальные уравнения. 1983. т.19. № 11. С. 2014 – 2015.
2. Фураев В. З., Чухно С. А. К вопросу о численном интегрировании обобщенного уравнения Буссинеска// Краевые задачи и математическое моделирование: сборник материалов VII Всероссийской конференции 4-5 декабря 2004 г. Новокузнецк: Изд-во КемГУ, 2004. С. 24-26.