УДК 373. 5. 016:514

Е. В. Кабакова, О. И. Луговская

E. V. Kabakova, O. I. Lugovskaya

Кабакова Екатерина Вячеславовна, студентка 5 курса ФЕНМиТ, ФГБОУ ВО «ЗабГУ», г. Чита.

Луговская Ольга Ивановна, доцент кафедры ФиПМТиМОМ, ФГБОУ ВО «ЗабГУ», г. Чита.

Kabakov Ekaterina Vyacheslavovna, student of the 5th course of FENMIT FGBOU VO «Zabgu», Chita.

Lugovskaya Olga Ivanovna, associate Professor, FIPMTIMOM FGBOU VO «Zabgu», Chita.

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ И ОСОБЕННОСТИ ИХ РЕШЕНИЯ

DIOPHANTINE EQUATIONS AND THEIR SOLUTIONS

Аннотация. *Статья посвящена одному из разделов теории чисел – диофантовым уравнениям. Решение в целых числах алгебраических уравнений с целыми коэффициентами представляет собой одну из труднейших и древнейших математических задач. Алгебраические уравнения с целыми числами, для которых находятся целые или рациональные решения, называются диофантовыми уравнениями.*

Annotation. *The article is devoted to one of the sections of the theory of numbers – Diophantine equations. Solving algebraic equations with integer coefficients in integer numbers is one of the most difficult and oldest mathematical problems. Algebraic equations with integers, for which there are integer or rational solutions, are called Diophantine equations.*

Ключевые слова: *арифметика, диофантово уравнение, алгоритм Евклида, цепные дроби, разложение на множители.*

Keywords: *arithmetic, Diophantine equation, Euclidean algorithm, continued fractions, factorization.*

Задачи, сводящиеся к неопределенным или диофантовым уравнениям, встречаются в клинописных текстах Вавилона, написанных более чем за 2000 лет до нашей эры. Даже то немногое, что мы знаем об античном ученом Диофанте, представляет собой одну из увлекательнейших загадок в математической истории. Главный след, который Диофант оставил в истории – это его произведение «Арифметика», представляющее собой сборник задач, большая часть которых приводит к неопределённым уравнениям. Каждая задача сопровождается решением. Многие задачи имеют длинную предысторию: некоторые из них восходят к школе Пифагора, другие – к древнему Вавилону. Однако до Диофанта эти задачи трактовались чисто арифметически. Диофант привнес в решение задач новые методы, которые ранее не использовались. В «Арифметике» Диофант систематизировал и расширил накопленный до него опыт решения неопределенных алгебраических уравнений в целых числах. С тех пор эти уравнения стали называться диофантовыми. «Арифметика» Диофанта легла в основу современной теории чисел [1].

Уравнения в целых числах часто встречаются в олимпиадных заданиях, а так же являются источником формирования базы задач для Единого государственного экзамена по математике. Анализ результатов ЕГЭ последних лет показал, что ненулевые баллы получают за эти здания не более 17 % выпускников. Для успешного выполнения их, выпускнику необходим высокий уровень математической культуры, которая формируется в течение всего периода обучения в школе, умения строить и исследовать математические модели, осуществлять поиск решения, выбирая различные методы решения уравнений и неравенств, в том числе и способы решения диофантовых уравнений. Указанные задания предназначены для отбора абитуриентов в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке.

Уравнения такого типа встречаются во многих областях. Такие уравнения используются в различных компьютерных алгоритмах. Например, при расшифровке алгоритма RSA, который используется во многих системах цифровой подписи и шифрования. Похожие случаи, связанные с решением диофантовых уравнений, возникают в алгоритмах обработки видео, проектирования осветительных систем (для расчета стробоскопических эффектов) и разработке систем управления сложными машинами (например, вертолетами). Так же уравнения такого типа иногда встречаются в экономике и теории вероятностей.

Основным понятием является следующее: линейным диофантовым уравнением – называется уравнение с несколькими неизвестными вида $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = c$, где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots a_n, c$ – целые числа, а неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются целыми или рациональными числами [3]. К решению таких уравнений сводятся разнообразные текстовые задачи, в которых неизвестные величины выражают количество предметов того или иного рода. Каждая конкретная задача в целых числах может решаться с помощью различных методов.

Известны следующие способы решения линейных диофантовых уравнений:

1. использование алгоритма Евклида;
2. использование цепных дробей;
3. способ перебора вариантов;
4. разложение на множители [2].

Рассмотрим на примерах более подробно каждый из способов решения линейных диофантовых уравнений.

Пример 1. Решить уравнение в целых числах $201x - 1999y = 12$.

Решение: Найти некоторое конкретное решение подбором в данном случае достаточно сложно. Воспользуемся алгоритмом Евклида для чисел 1999 и 201:

НОД(1999, 201) = НОД(201, 190) = НОД(190, 11) = НОД(11, 3) = НОД(3 , 2) = НОД(2, 1) = 1. Запишем этот процесс в обратном порядке:

1 = 2 – 1 = 2 – (3 – 2) = 2·2 – 3 = 2· (11 – 3·3) – 3 = 2·11 – 7·3 = 2·11 – 7(190 – 11·17) = 121·11 – 7·190 = 121(201 – 190) – 7·190 = 121·201 – 128·190 = 121·201 – 128(1999 – 9·201) = 1273·201 – 128·1999.

Значит, пара (1273, 128) является решением уравнения $201x - 1999y = 1$. Тогда пара чисел $x_0 = 1273 \cdot 12 = 15276$, $y_0 = 128 \cdot 12 = 1536$ является решением уравнения $201x - 1999y = 12$.

Общее решение этого уравнения запишется в виде $x = 15276 + 1999k$, $y = 1536 + 201k$, где k – целое число, или, после переобозначения (используем, что 15276 = 1283 + 7·1999, 1536 = 129 + 7·201), $x = 1283 + 1999n$, $y = 129 + 201n$, где n – целое число.

Ответ: $(1283+1999n, 129+201n)$, где n – целое число.

Пример 2. Решить уравнение в целых числах $25x - 18y + 1 = 0$.

Решение: Найдем наибольший общий делитель пары чисел 25 и 18 с помощью цепных дробей, то есть, используем один из вариантов алгоритма Евклида. Преобразуем неправильную дробь $\frac{25}{18}$, последовательно выделяя целые части неправильных дробей:

$$\frac{25}{18} = 1 + \frac{7}{18} = 1 + \frac{1}{\frac{18}{7}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{7}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{7}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}.$$

Полученное выражение называется цепной дробью. Числа 1, 2, 1, 1, выделенные в этом выражении, являются последовательными частными алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя пары чисел 25 и 18. Отбросим дробь 1/3 и преобразуем получившуюся цепную дробь в обыкновенную:

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}.$$

Вычтем полученную дробь из исходной дроби 25/18:

$$\frac{25}{18}-\frac{7}{5}=\frac{125-126}{18\times 5}=\frac{-1}{18\times 5}.$$

Тогда: 25 x 5 – 18 x 7 + 1 = 0. Получили частное решение исходного уравнения $x = 5$, $y = 7$. Общее решение исходного уравнения $25x - 18y + 1 = 0$ имеет вид:

$$\begin{cases} x = 5 + 18t; \\ y = 7 + 25t, \end{cases} t \in Z.$$

Пример 3. Допустим, в аквариуме живут осьминоги и морские звёзды. У осьминогов по 8 ног, а у морских звёзд – по 5. Всего конечностей насчитывается 39. Сколько в аквариуме животных?

Решение: Пусть x – количество морских звёзд, y – количество осьминогов. Тогда у всех осьминогов по $8y$ ног, а у всех звёзд $5x$ ног. Составим уравнение: $5x + 8y = 39$. Заметим, что количество животных может выражаться только натуральными числами. Следовательно, если x – целое неотрицательное число, то и $y = (39 - 5x)/8$ должно быть целым и неотрицательным, а, значит, нужно, чтобы выражение $39 - 5x$ без остатка делилось на 8. Простой перебор вариантов показывает, что это возможно только при $x = 3$, тогда $y = 3$.

Пример 4. Для всех значений параметра $a \in (2,4)$ найти все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству $x^2 + 5xy + 6y^2 = a$.

Решение: Так как слева от знака равенства находится целое число, то *a* должно быть целым, следовательно, $a = 3$. Итак, имеем: $x^2 + 5xy + 6y^2 = 3$.

Разложим левую часть уравнения на множители: $(x^2 + 2xy) + (3xy + 6y^2) = 3 \leftrightarrow x(x + 2y) + 3y(x + 2y) = 3 \leftrightarrow (x + 2y)(x + 3y) = 3$.

Так как при целых *x, y* оба сомножителя в левой части целочисленные. Число 3 можно разложить в произведение двух целых чисел следующим образом: 3 = 1 x 3 = 1 x 3 = (-1) x (-3). Поэтому данное уравнение равносильно совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + 3y = -3 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x + 2y = -3 \\ x + 3y = -1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}.$$

Ответ: при $a = 3$ – четыре решения $(x, y) \in \{(3; -2); (-3; 2); (-7; 2); (7; -2)\}$ при $a \in (2,3) \cup (3,4)$ уравнение не имеет решений.

Можно сделать вывод, что использование алгоритма Евклида является универсальным способом решения диофантовых уравнений (уравнений в целых числа). Цепные дроби требуют большего времени для решения поставленной задачи, поэтому не всегда этот способ уместен. Перебор вариантов существенно зависит от коэффициентов данного уравнения: при больших коэффициентах в уравнении требуются значительные временные затраты. Поэтому рациональность решения имеет место крайне редко. Последний способ - разложения на множители, связан с тождественными преобразованиями одной из частей уравнения и способствует развитию устойчивого интереса к изучению линии уравнений и неравенств.

Таким образом, решение уравнений в целых числах – один из самых интересных разделов математики. Ни один крупный математик не прошёл мимо теории диофантовых уравнений. В настоящее время, в связи с переходом на федеральные государственные образовательные стандарты возникает особенная необходимость в изучении таких уравнений. При решении диофантовых уравнений ведущую роль выполняет анализ как поиск способа решения задачи и синтез как реализация построенного плана решения. Учитель математики имеет возможность обучать решению диофантовых уравнений, начиная с седьмого класса, а базовый материал закладывается уже в пятых-шестых классах при изучении делимости чисел.

Список литературы

1. Башмакова, И. Г. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма [Текст] / И. Г. Башмакова, Е. И. Славутин. – М. : «Наука», 1984. – 265 с.
2. Гринько, Е. П. Методы решения диофантовых уравнений при подготовке школьников к олимпиадам [Текст] / Е. П. Гринько, А. Г. Головач. – Брест, 2013. – 178 с.
3. Жмурова, И. Ю. Использование историко-математических сведений в курсе теории чисел [Текст] / И. Ю. Жмурова, А. Ю. Бесперстова. // Молодой ученый. – 2013. – № 10. – С. 1-5.