

УДК 373.5.016:514

К. Б. Милюхина, С. А. Сердюк

K. B. Milyukhina, S. A. Serdyuk

Милюхина Кристина Борисовна, ученица 9 класса МБОУ «Лесоперевалочная СОШ № 2», РХ, с. Бельтирское, Аскизский район.

Руководитель: Сердюк Светлана Анатольевна, учитель математики, МБОУ «Лесоперевалочная СОШ № 2», РХ, с. Бельтирское, Аскизский район.

Milyukhina Christine Borisovna, 9th grade student, MBOU «Lesoperevalochnaya SOSH № 2», RH, Beltirskoye village, Askizsky district.

Supervisor: Serdyuk Svetlana Anatolevna, the mathematics teacher, MBOU «Lesoperevalochnaya SOSH № 2», RH, Beltirskoye village, Askizsky district.

РАЗНЫЕ СПОСОБЫ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

DIFFERENT METHODS FOR SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS

Аннотация. Статья посвящена решению геометрической задачи разными способами. Приводятся различные способы при решении одной задачи, направленных на развитие математических знаний и познавательных универсальных учебных действий: на поиск способов и информации.

Annotation. The article is devoted to solving the geometric problem in different ways. Various methods are presented for solving one problem aimed at the development of mathematical knowledge and cognitive universal educational actions: to find ways and information.

Ключевые слова: геометрический способ, метод координат, тригонометрический способ, метод площадей, теорема Менелая.

Keywords: *geometrical method, coordinate method, trigonometric method, the method of squares, the theorem of Menelaus.*

Основная часть

Задача: *В треугольнике ABC биссектриса BF и медиана AK перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 208. Найдите стороны треугольника ABC [4].*

Решение 1. Геометрический способ (рис. 1)

1) О – точка пересечения отрезков ВF и АК.

Треугольник АВК – равнобедренный, так как его биссектриса ВО высотой, значит $AO = OK = 104$, $BC = 2BK = 2AB$.

2) По свойству биссектрисы треугольника: $\frac{AF}{AB} = \frac{CF}{BC}$, $CF = \frac{AF \cdot BC}{AB} = \frac{AF \cdot 2AB}{AB}$
 $CF = 2AF$, $AC = 3AF$ [1].

3) Проведем через вершину В прямую, параллельную АС.

Р-точка пересечения прямой ВР с медианой АК, $BP = AC = 3AF$.

4) Треугольники АOF и ВОР подобны, значит $\frac{OF}{BO} = \frac{AF}{BP} = \frac{AF}{3AF} = \frac{1}{3}$, тогда $BO = 156$.

5) Рассмотрим треугольник АОВ- прямоугольный, применяя Пифагора, найдем сторону АВ: $AB^2 = AO^2 + BO^2$, $AB^2 = 104^2 + 156^2$
 $AB^2 = 10816 + 24336$, $AB^2 = 2704 \cdot 13$, $AB = 52\sqrt{13}$,
 $BC = 2AB = 104\sqrt{13}$.

6) Рассмотрим треугольник АOF – прямоугольный, применяя Пифагора, найдем сторону АF: $AF^2 = AO^2 + FO^2 = 104^2 + 52^2 = 2 \cdot 104^2$
 $AF = 52\sqrt{5}$, $AC = 3 \cdot 52\sqrt{5} = 156\sqrt{5}$.

Ответ: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$.

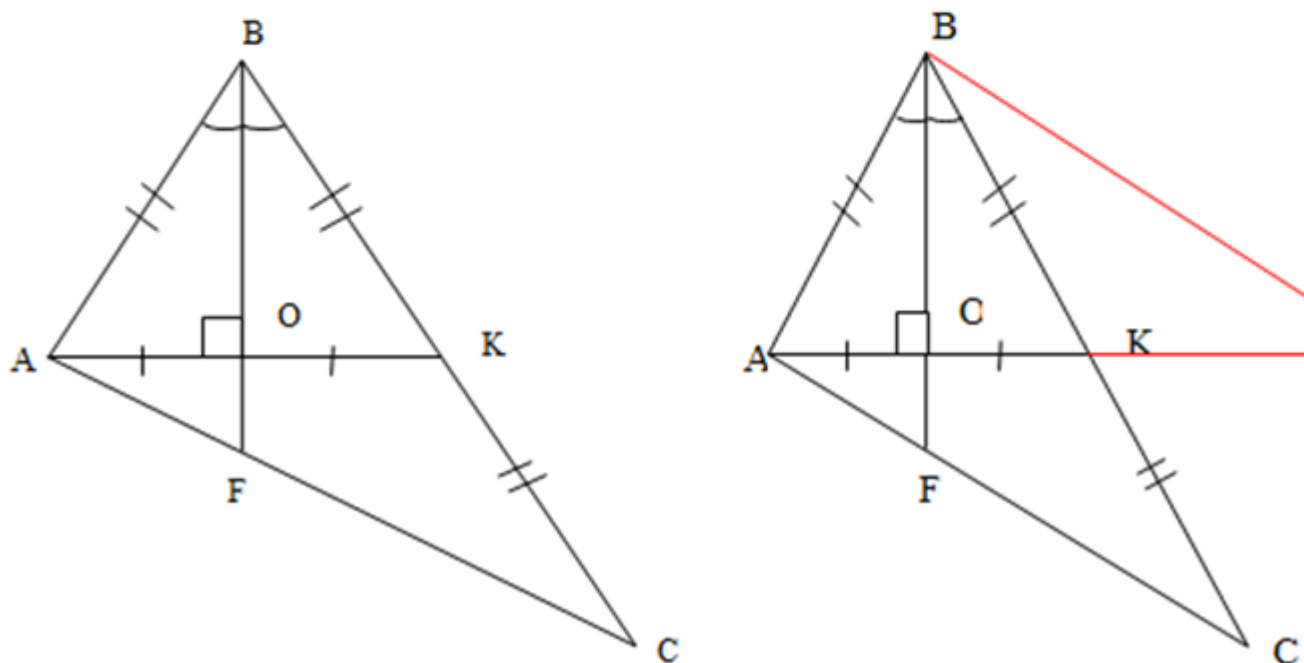


Рисунок 1. Чертеж к геометрическому способу решения задачи

Решение 2. Метод координат (рис. 2)

1) $BF = 208$, $AK = 208$.

Введем прямоугольную систему координат, О-точка пересечения биссектрисы BF и медианы AK . Треугольник AOB равен треугольнику KOB (прямоугольные и общий катет BO), значит $AO = OK = 104$, $AB = BK$, $BC = 2BK = 2AB$.

2) Точка $A(-104;0)$, точка $B(0;y_B)$, точка $K(104;0)$, точка K середина AC , точка $C(208; -y_C)$, точка $F(0;y_F)$ принадлежит прямой AC .

3) Составим уравнение прямой AC : $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ [6], $\frac{x+104}{208-(-104)} = \frac{y-0}{-y_C-0}$.

Точка $F(0;y_F)$ принадлежит прямой AC : $\frac{0+104}{312} = \frac{y_F}{-y_C}$, $y_F = \frac{-y_C}{3}$. По

формуле расстояние между точками:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ [1],}$$

$$BF^2 = (0 - 0)^2 + (y_F - y_B)^2,$$

$$BF^2 = \left(\frac{y_C}{3} + y_B\right)^2, y_B = 156.$$

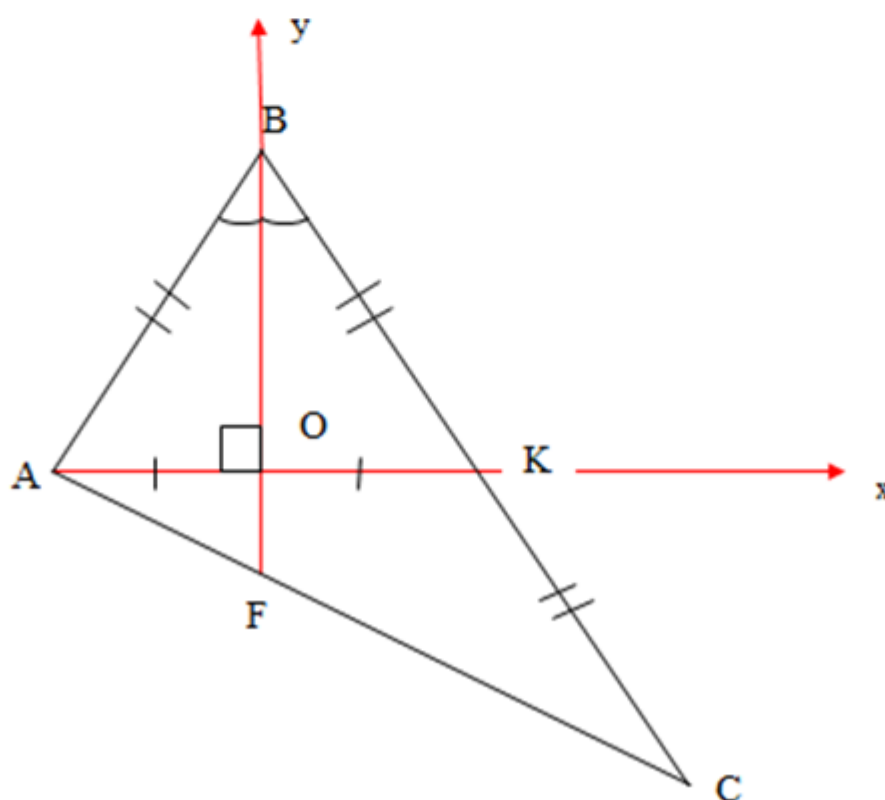
Точка $B(0;156)$, тогда точка $C(208;-156)$.

4) По формуле расстояние между точками найдем стороны треугольника

$$AB = \sqrt{(0 + 104)^2 + (0 - 156)^2}, \quad AB = 52\sqrt{13}, \quad BC = 2AB =$$

$$AC = \sqrt{(208 + 104)^2 + (-156 - 0)^2}, AC = 156\sqrt{5}.$$

Ответ: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$.



Решение 3. Применение теоремы о средней линии треугольника (рис. 3)

- 1) Рассмотрим треугольник BFC : проведем среднюю линию KM .
- 2) Так как $KM \parallel BF$ и $AO = OK$, то OF – средняя линия треугольника AKM [1].

$$\text{Значит } OF = \frac{1}{2} KM, KM = \frac{1}{2} BF \Rightarrow OF = \frac{1}{4} BF$$

- 3) Так как $BF = 208$, то $OF = 52$, $BO = 156$

- 4) По теореме Пифагора, найдем стороны треугольника ABC :

$$AB = 52\sqrt{13}$$

$$BC = 2AB = 104\sqrt{13}$$

$$AC = 3AF = 3 \cdot 52\sqrt{5} = 156\sqrt{5}$$

Ответ: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$.

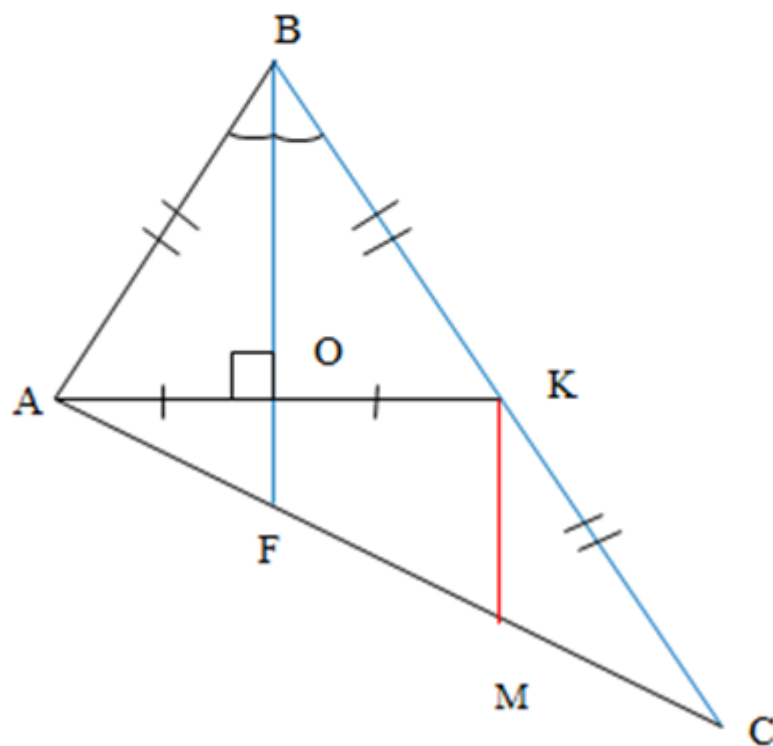


Рисунок 3. Применение теоремы о средней линии треугольника

Решение 4. Тригонометрический способ (рис. 4)

1) Пусть $AB = x$, $\angle ABC = 2\beta$.

Применяя теорему косинусов [1], рассмотрим $\triangle ABF$, выразим AF :

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2AB \cdot BF \cdot \cos \angle ABF$$

$$AF^2 = x^2 + 208^2 - 2 \cdot x \cdot 208 \cdot \cos \angle ABF$$

$$AF^2 = x^2 + 208^2 - 416x \cdot \cos \beta$$

2) Рассмотрим $\triangle BCF$, выразим CF :

$$CF^2 = BC^2 + BF^2 - 2 \cdot BC \cdot BF \cdot \cos \angle FBC$$

$$CF^2 = (2x)^2 + 208^2 - 2 \cdot 2x \cdot 208 \cdot \cos \beta$$

$$CF^2 = 4x^2 + 208^2 - 832x \cdot \cos \beta$$

3) Так как $CF = 2AF$ (по свойству биссектрисы $\triangle$), тогда $CF^2 = 4AF^2$ [

$$4x^2 + 208^2 - 832x \cdot \cos \beta = 4(x^2 + 208^2 - 416x \cdot \cos \beta)$$

$$4x^2 + 208^2 - 832x \cdot \cos \beta = 4x^2 + 4 \cdot 208^2 - 4 \cdot 416x \cdot \cos \beta$$

$$4 \cdot 416x \cdot \cos \beta - 832x \cdot \cos \beta = 4 \cdot 208^2 - 208^2$$

$$832x \cdot \cos \beta = 208^2 \cdot 3$$

$$x \cdot \cos \beta = \frac{208 \cdot 208 \cdot 3}{208 \cdot 4} = 52 \cdot 3 = 156$$

$$x \cdot \cos \beta = 156$$

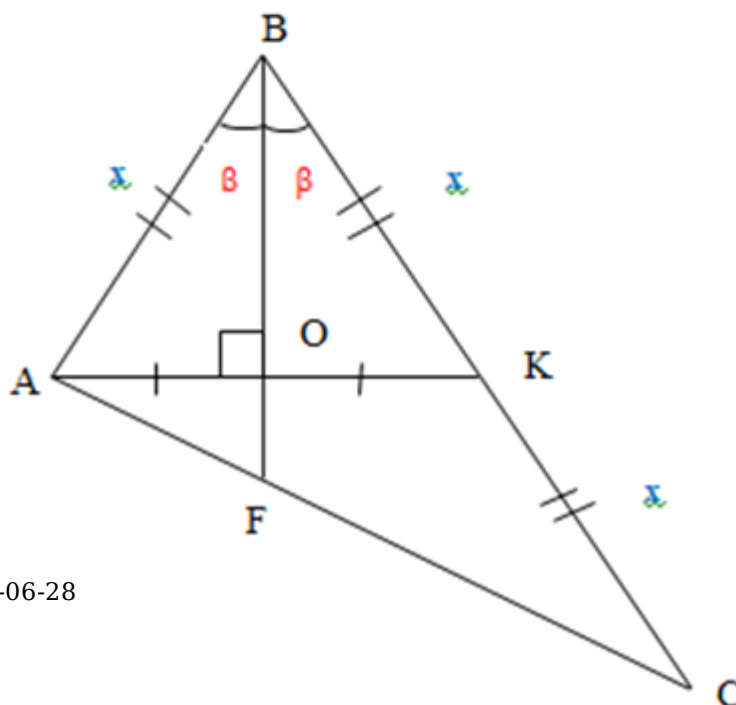
По определению: $\cos \beta = \frac{BO}{AB} \Rightarrow BO = \cos \beta \cdot x = 156$, $BO = 156$

$OF = 52$.

4) Применяя теорему Пифагора, найдем стороны $\triangle ABC$:

$$AB = 52\sqrt{13}, BC = 2AB = 104\sqrt{13}, AC = 3AF = 3 \cdot 52\sqrt{3} = 156\sqrt{3}$$

Ответ: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{3}$.



Решение 5. Метод площадей (рис. 5)

1) Так как $AO=OK=104$, $BF=208$, $AK \perp BF$, то

$$S_{\triangle ABF} = S_{\triangle BKF} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 104 \cdot 208 = 10816.$$

2) $S_{\triangle CKF} = 10816$, так как медиана FK делит $\triangle BFC$ на два равных треугольника $\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 3 \cdot 10816$ [5].

3) AK – медиана $\triangle ABC \Rightarrow S_{\triangle ABK} = \frac{3 \cdot 10816}{2}$.

$$4) S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO, S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABK}$$

$$\frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10816}{2}$$

$$AO \cdot BO = \frac{3 \cdot 10816}{2} = 3 \cdot 5408$$

$$BO = \frac{3 \cdot 5408}{AO} = \frac{3 \cdot 5408}{104} = 156.$$

Итак, $BO = 156$, $AO = 104$, $OF = BF - BO = 208 - 156 = 52$.

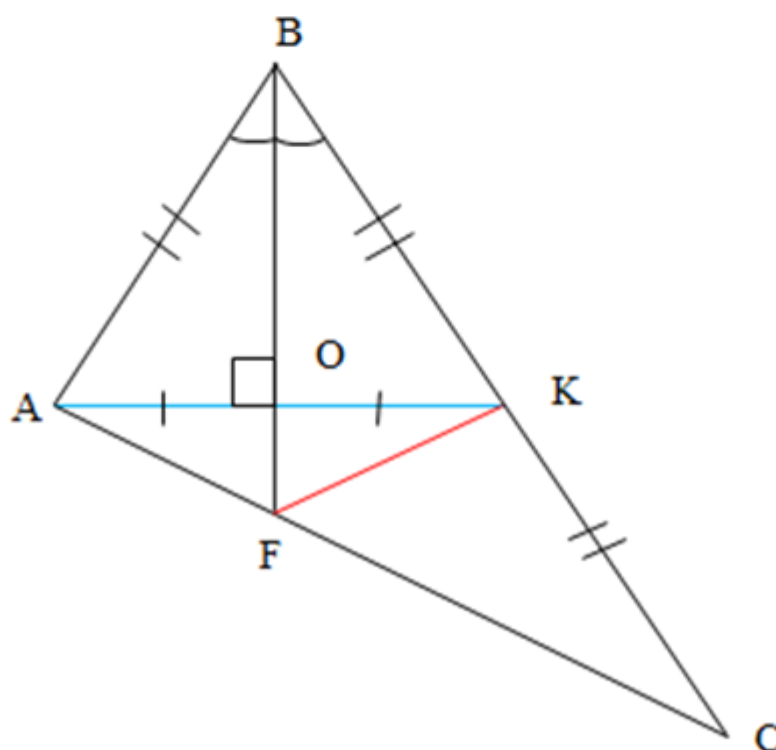
5) Применяя теорему Пифагора, найдем стороны $\triangle ABC$:

$$AB = 52\sqrt{13}$$

$$BC = 2AB = 104\sqrt{13}$$

$$AC = 156\sqrt{5}$$

Ответ: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$.



Решение 6. Применение теоремы Менелая (рис. 6)

Менелай Александрийский – древнегреческий математик и астроном.

Теорема Менелая. Пусть прямая пересекает треугольник ABC, при этом точка её пересечения со стороной AB, A_1 – точка её пересечения со стороной AC, B_1 – точка её пересечения с продолжением стороны BC, тогда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ [2, 7].

- 1) Секущая BF пересекает стороны $\triangle ACK$ в точках O и F, и продолжение стороны CK в точке B.

Применяя теорему Менелая, рассмотрим $\triangle ACK$ и секущую BF:

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CB}{BK} \cdot \frac{KO}{OA} = 1, \text{ так как } \frac{CB}{BK} = \frac{2}{1}, KO = OA = 104, \text{ тогда:}$$

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{104}{104} = 1, \frac{AF}{FC} = \frac{1}{2} \Rightarrow FC = 2AF, AC = 3AF.$$

- 2) Применяя теорему Менелая, рассмотрим $\triangle BCF$ и секущую AK:

$$\frac{BO}{OF} \cdot \frac{AF}{AC} \cdot \frac{CK}{KB} = 1, \text{ так как } CK = KB, AF = \frac{1}{2}FC, \text{ тогда } \frac{BO}{OF} \cdot \frac{AF}{3AF} \cdot \frac{CK}{KB} = 1,$$

$$\frac{BO}{OF} = \frac{3}{1} \Rightarrow BO = 3 \text{ части}, OF = 1 \text{ часть},$$

$$BF = BO + OF$$

$$208 = 3X + X$$

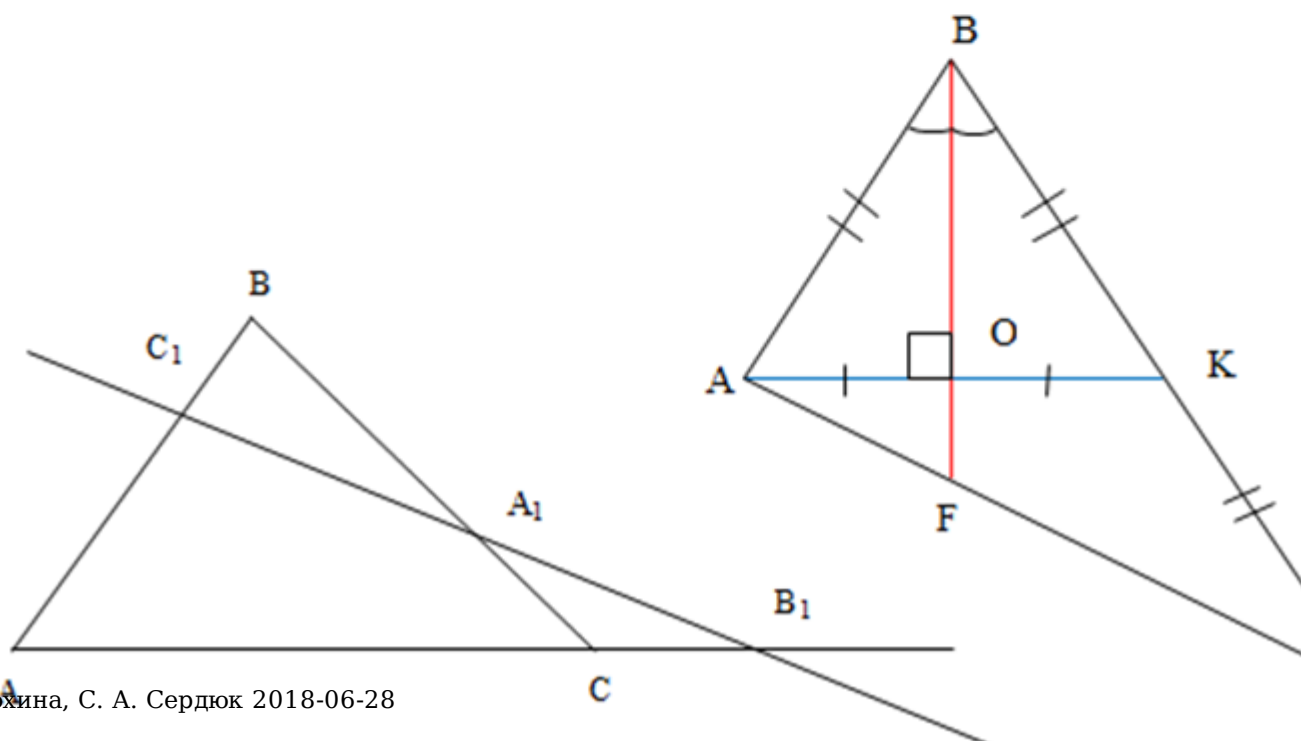
$$X = 52 (1 \text{ часть}) = OF$$

$$BO = 3 \cdot 52 = 156.$$

- 3) Применяя теорему Пифагора, найдем стороны $\triangle ABC$:

$$AB = 52\sqrt{13}, BC = 2AB = 104\sqrt{13}, AC = 3AF = 3 \cdot 52\sqrt{5} = 156\sqrt{5}.$$

$$\text{Ответ: } AB = 52\sqrt{13}, BC = 104\sqrt{13}, AC = 156\sqrt{5}.$$



Заключение

Решая задачи вышеуказанными способами, изучая дополнительный материал, мы пришли к выводу, что существуют рациональные способы решения геометрических задач. С одноклассниками данную задачу решали первым способом, т.е. геометрическим (применяли дополнительное построение). При решении данной задачи самый рациональный способ (простой и доступный) – применение теоремы о средней линии треугольника. Метод площадей тоже несложный и удобный. Тригонометрический способ неудобен для больших чисел. При работе над темой, мы познакомились с теоремой Менелая. Способ ее применения оказался весьма оригинален и интересен. Считаю, что цель работы достигнута. Полученные знания пригодятся нам и моим одноклассникам при сдаче ОГЭ.

Список литературы

1. Атанасян, Л. С. Геометрия. 7-9 классы : учеб. общеобразоват. уч-реждений [Текст] / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2015. – 384 с.
2. Атанасян, Л. С. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений [Текст] / Л. С. Атанасян и др. – М. : Просвещение, 2011.
3. Балаян, Э. Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ. 7-9 классы [Текст] / Э. Н. Балаян. – Ростов на/Д. : Феникс, 2015.
4. Высоцкий, И. Р. ОГЭ 2018. Математика. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ОГЭ [Текст] / И. Р. Высоцкий, Л. О. Рослова и т.д.; под редакцией И. В. Ященко. – М. : Издательство «Экзамен», 2018. – Вариант 15, С. 97.
5. Готман, Э. Г. Задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся. [Текст] / Э. Г. Готман. – М. : Просвещение, 1996.
6. Зив, Б. Г. Задачи по геометрии: пособие для учащихся 7-11 классов [Текст] / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер. – М. : Просвещение, 2014.

7. Теорема Менелая [Электронный ресурс] // Википедия. –
Режим доступа : [https://ru.wikipedia.org/wiki/
Теорема_Менелая](https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Менелая).