УДК 373.5.016:514

К. Б. Милюхина, С. А. Сердюк

K. B. Milyukhina, S. A. Serdyuk

Милюхина Кристина Борисовна, ученица 9 класса МБОУ «Лесоперевалочная СОШ № 2», РХ, с. Бельтирское, Аскизский район.

Руководитель: Сердюк Светлана Анатольевна, учитель математики, МБОУ «Лесоперевалочная СОШ № 2», РХ, с. Бельтирское, Аскизский район.

Milyukhina Christine Borisovna, 9th grade student, MBOU «Lesoperevalochnaya SOSH № 2», RH, Beltirskoye village, Askizsky district.

Supervisor: Serdyuk Svetlana Anatolevna, the mathematics teacher, MBOU «Lesoperevalochnaya SOSH № 2», RH, Beltirskoye village, Askizsky district.

РАЗНЫЕ СПОСОБЫ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

DIFFERENT METHODS FOR SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS

Аннотация. *Статья посвящена решению геометрической задачи разными способами. Приводятся различные способы при решении одной задачи, направленных на развитие математических знаний и познавательных универсальных учебных действий: на поиск способов и информации.*

Annotation. *The article is devoted to solving the geometric problem in different ways. Various methods are presented for solving one problem aimed at the development of mathematical knowledge and cognitive universal educational actions: to find ways and information.*

Ключевые слова: *геометрический способ, метод координат, тригонометрический способ, метод площадей, теорема Менелая.*

Keywords: *geometrical method, coordinate method, trigonometric method, the method of squares, the theorem of Menelaus.*

Основная часть

Задача: В треугольнике ABC биссектриса BF и медиана AK перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 208. Найдите стороны треугольника ABC [4].

Решение 1. Геометрический способ (рис. 1)

1) O – точка пересечения отрезков BF и AK.

Треугольник ABK – равнобедренный, так как его биссектриса BO высотой, значит AO = OK = 104, BC = 2BK = 2AB.

2) По свойству биссектрисы треугольника: $\frac{AF}{AB} = \frac{CF}{BC}$, $CF = \frac{AF*BC}{AB} = \frac{AF*2}{AB}$

CF = 2AF, AC = 3AF [1].

3) Проведем через вершину B прямую, параллельную AC.

P-точка пересечения прямой BP с медианой AK, BP=AC=3AF.

4) Треугольники AOF и BOP подобны, значит $\frac{OF}{BO} = \frac{AF}{BP} = \frac{AF}{3AF} = \frac{1}{3}$, тогд

BO=156.

5) Рассмотрим треугольник AOB- прямоугольный, применяя Пифагора, найдем сторону AB: AB2 =AO2 + BO2 , AB2 =1042 +156

$AB^2 = 10816 + 24336$, $AB^2 = 2704*13$, $AB = 52\sqrt{13}$,

$BC = 2AB = 104\sqrt{13}$.

6) Рассмотрим треугольник AOF – прямоугольный, применяя Пифагора, найдем сторону AF: $AF^2 = AO^2 + FO^2 = 104^2 + 52^2 = 2$

$AF = 52\sqrt{5}$, $AC = 3 * 52\sqrt{5} = 156\sqrt{5}$.

Ответ: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$.

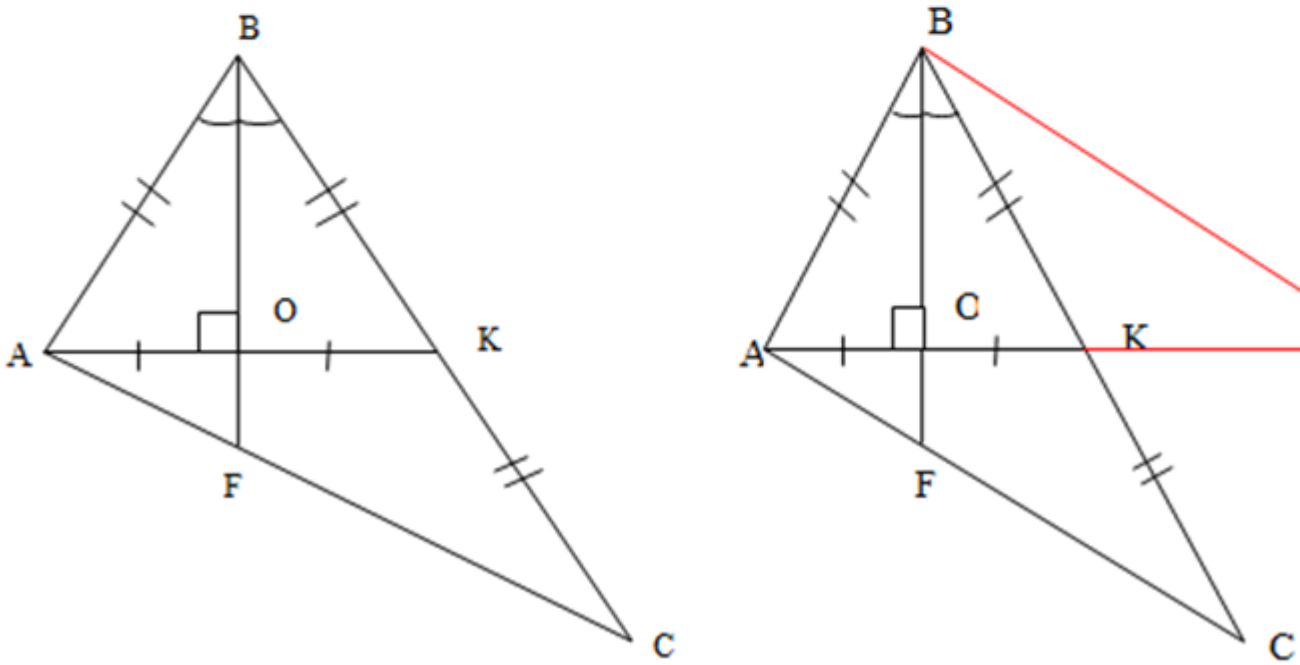


Рисунок 1. Чертеж к геометрическому способу решения задачи

Решение 2. Метод координат (рис. 2)

1) BF = 208, AK = 208.

Введем прямоугольную систему координат, O-точка пересечения бисс BF и медианы AK. Треугольник AOB равен треугольнику KOB (прямоуг значит AO = OK = 104, AB = BK, BC = 2BK = 2AB.

2) Точка A(-104;0), точка B(0;y_B), точка K(104;0), точка K середина B точка C(208; -y_C), точка F(0;y_F) принадлежит прямой AC.

3) Составим уравнение прямой AC: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ [6], $\frac{x+104}{208-(-104)} = \frac{y-0}{-y_C-}$

Точка F(0;y_F) принадлежит прямой AC: $\frac{0+104}{312} = \frac{y_F}{-y_C}$, $y_F = \frac{-y_C}{3}$. Пр формулу расстояние между точками:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ [1]},$$

$$BF^2 = (0-0)^2 + (y_F - y_B)^2,$$

$$BF^2 = (\frac{y_C}{3} + y_B)^2, y_B = 156.$$

Точка B(0;156), тогда точка C(208;-156).

4) По формуле расстояние между точками найдем стороны треугольни

$$AB = \sqrt{(0+104)^2 + (0-156)^2}, \quad AB = 52\sqrt{13}, \quad BC = 2AB =$$

$$AC = \sqrt{(208+104)^2 + (-156-0)^2}, AC = 156\sqrt{5}.$$

Ответ: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$.

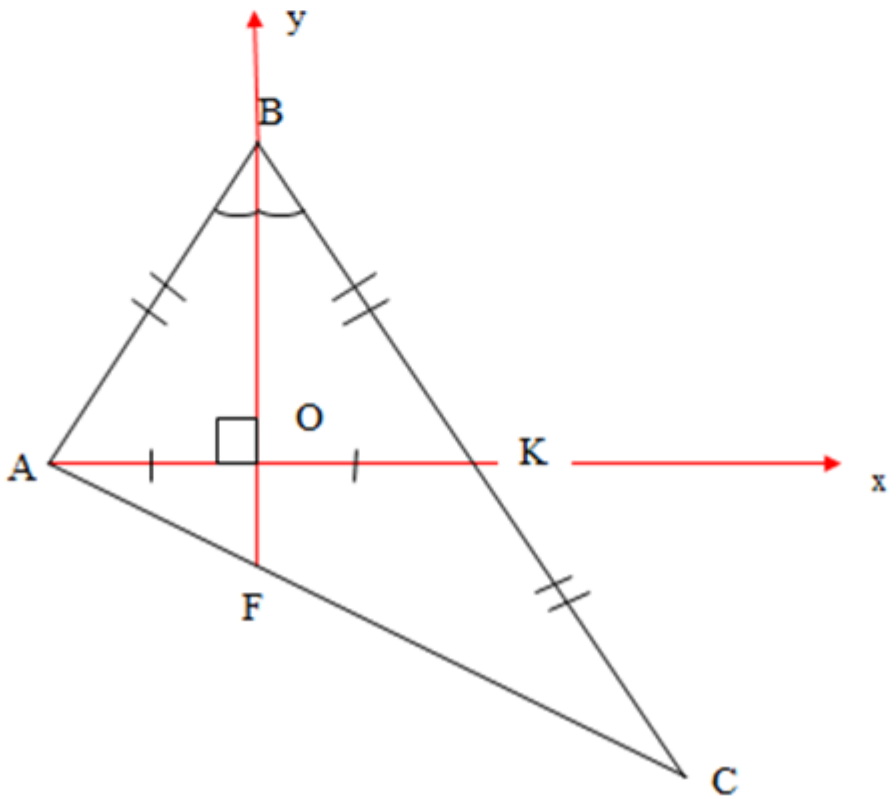


Рисунок 2. Чертеж к задаче для решения методом координат

Решение 3. Применение теоремы о средней линии треугольника (рис. 3)

1) Рассмотрим треугольник BFC: проведем среднюю линию KM.
2) Так как KM || BF и AO = OK, то OF – средняя линия треу AKM [1].

Значит $OF = \frac{1}{2}\ KM$, $KM = \frac{1}{2}\ BF \Rightarrow OF = \frac{1}{4}\ BF$

3) Так как BF = 208, то OF = 52, BO = 156
4) По теореме Пифагора, найдем стороны треугольника ABC:

$AB = 52\sqrt{13}$

$BC = 2AB = 104\sqrt{13}$

$AC = 3AF = 3 \cdot 52\sqrt{5} = 156\sqrt{5}$

Ответ: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$.

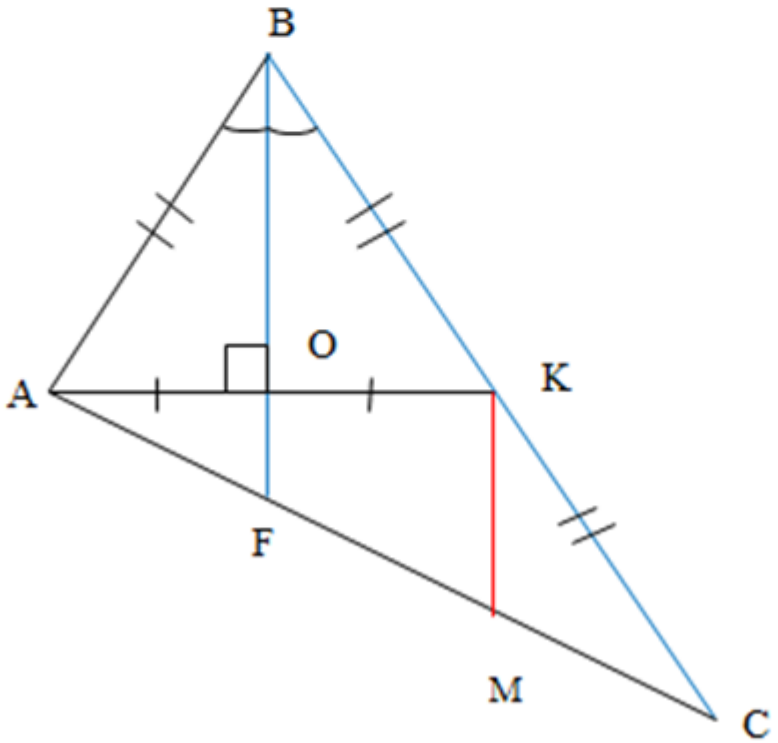


Рисунок 3. Применение теоремы о средней линии треугольника

Решение 4. Тригонометрический способ (рис. 4)

1) Пусть AB = x, $\angle ABC = 2\beta$.

Применяя теорему косинусов [1], рассмотрим ΔABF, выразим AF:

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2AB \cdot BF \cdot \cos\angle ABF$$

$$AF^2 = x^2 + 208^2 - 2 \cdot x \cdot 208 \cdot \cos\angle ABF$$

$$AF^2 = x^2 + 208^2 - 416x \cdot \cos\beta$$

2) Рассмотрим ΔBCF, выразим CF:

$$CF^2 = BC^2 + BF^2 - 2 \cdot BC \cdot BF \cdot \cos\angle FBC$$

$$CF^2 = (2X)^2 + 208^2 - 2 \cdot 2x \cdot 208 \cdot \cos\beta$$

$$CF^2 = 4x^2 + 208^2 - 832x \cdot \cos\beta$$

3) Так как CF = 2AF(по свойству биссектрисы Δ), тогда $CF^2 = 4AF^2$ [

$$4x^2 + 208^2 - 832x \cdot \cos\beta = 4(x^2 + 208^2 - 416x \cdot \cos\beta)$$

$$4x^2 + 208^2 - 832x \cdot \cos\beta = 4x^2 + 4 \cdot 208^2 - 4 \cdot 416x \cdot \cos\beta$$

$$4 \cdot 416x \cdot \cos\beta - 832x \cdot \cos\beta = 4 \cdot 208^2 - 208^2$$

$$832x \cdot \cos\beta = 208^2 \cdot 3$$

$$x \cdot \cos\beta = \frac{208 \cdot 208 \cdot 3}{208 \cdot 4} = 52 \cdot 3 = 156$$

$$x \cdot \cos\beta = 156$$

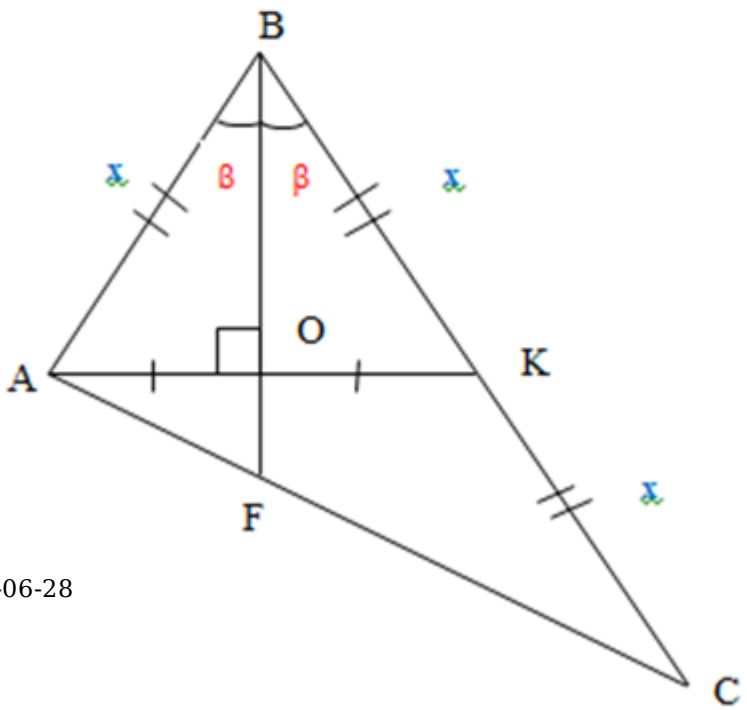
По определению: $\cos\beta = \frac{BO}{AB}$ => $BO = \cos\beta \cdot X = 156$, BO = 156

OF = 52.

4) Применяя теорему Пифагора, найдем стороны ΔABC:

AB = $52\sqrt{13}$, $BC = 2AB = 104\sqrt{13}$, $AC = 3AF = 3 \cdot 52\sqrt{3} = 156\sqrt{}$

Ответ: AB = $52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$.



Решение 5. Метод площадей (рис. 5)

1) Так как AO=OK=104, BF=208, AK⊥BF, то

$$S_{\Delta ABF} = S_{\Delta BKF} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 104 \cdot 208 = 10816.$$

2) $S_{\Delta CKF} = 10816$, так как медиана FK делит ΔBFC на два равн треугольника => $S_{\Delta ABC} = 3 \cdot 10816$ [5].

3) AK – медиана ΔABC => $S_{\Delta ABK} = \frac{3 \cdot 10816}{2}$.

4) $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO$, $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABK}$

$$\frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10816}{2}$$

$$AO \cdot BO = \frac{3 \cdot 10816}{2} = 3 \cdot 5408$$

$$BO = \frac{3 \cdot 5408}{AO} = \frac{3 \cdot 5408}{104} = 156.$$

Итак, BO = 156, AO = 104, OF = BF – BO = 208 – 156 = 52.

5) Применяя теорему Пифагора, найдем стороны ΔABC:

$$AB = 52\sqrt{13}$$

$$BC = 2AB = 104\sqrt{13}$$

$$AC = 156\sqrt{5}$$

Ответ: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$.

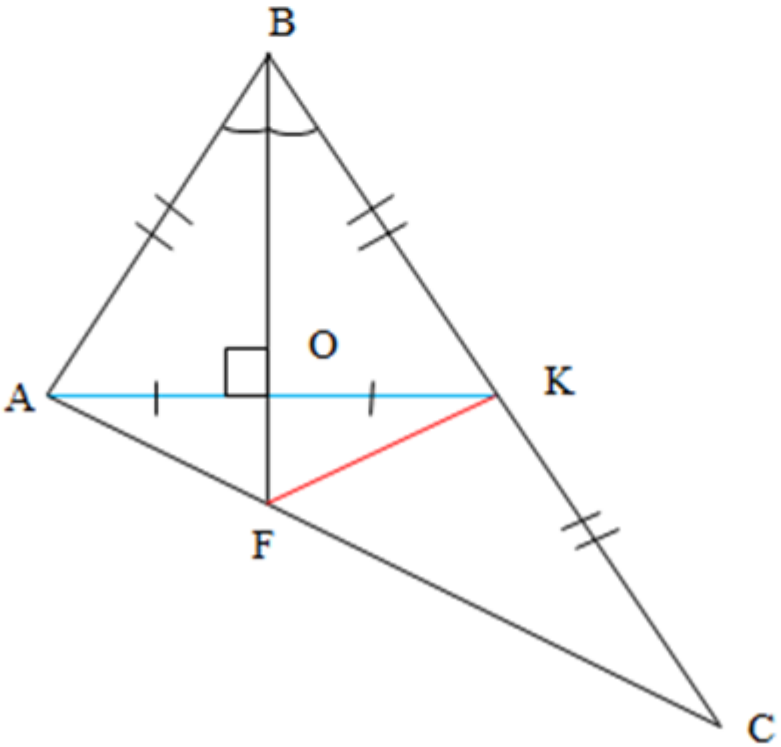


Рисунок 5. Чертеж к решению задачи с помощью метода площадей

Решение 6. Применение теоремы Менелая (рис. 6)

Менелай Александрийский – древнегреческий математик и астроном.

Теорема Менелая. Пусть прямая пересекает треугольник ABC, при точка её пересечения со стороной AB, A_1 – точка её пересечения со сторон B_1 – точка её пересечения с продолжением стороны AC, тогда $\frac{AC_1}{C_1B} * \frac{BA_1}{A_1C}$ [2, 7].

1) Секущая BF пересекает стороны ΔACK в точках O и F, и прод стороны CK в точке B.

   Применяя теорему Менелая, рассмотрим ΔACK и секущую BF:

   $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CB}{BK} \cdot \frac{KO}{OA} = 1$, так как $\frac{CB}{BK} = \frac{2}{1}$, $KO = OA = 104$, тогда:

   $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{104}{104} = 1$, $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$ $=> FC = 2AF, AC = 3AF$.

2) Применяя теорему Менелая, рассмотрим ΔBCF и секущую AK:

   $\frac{BO}{OF} \cdot \frac{AF}{AC} \cdot \frac{CK}{KB} = 1$, так как $CK = KB$, $AF = \frac{1}{2}FC$, тогда $\frac{BO}{OF} \cdot \frac{AF}{3AF} \cdot \frac{CK}{KB} = 1$,

   $\frac{BO}{OF} = \frac{3}{1}$ $=> BO = 3$ части, $OF = 1$ часть,

   BF = BO + OF

   208 = 3X + X

   X = 52 (1 часть) = OF

   BO = 3·52 = 156.

3) Применяя теорему Пифагора, найдем стороны ΔABC:

   $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 2AB = 104\sqrt{13}$, $AC = 3AF = 3 \cdot 52\sqrt{5} = 156\sqrt{5}$.

   Ответ: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$.

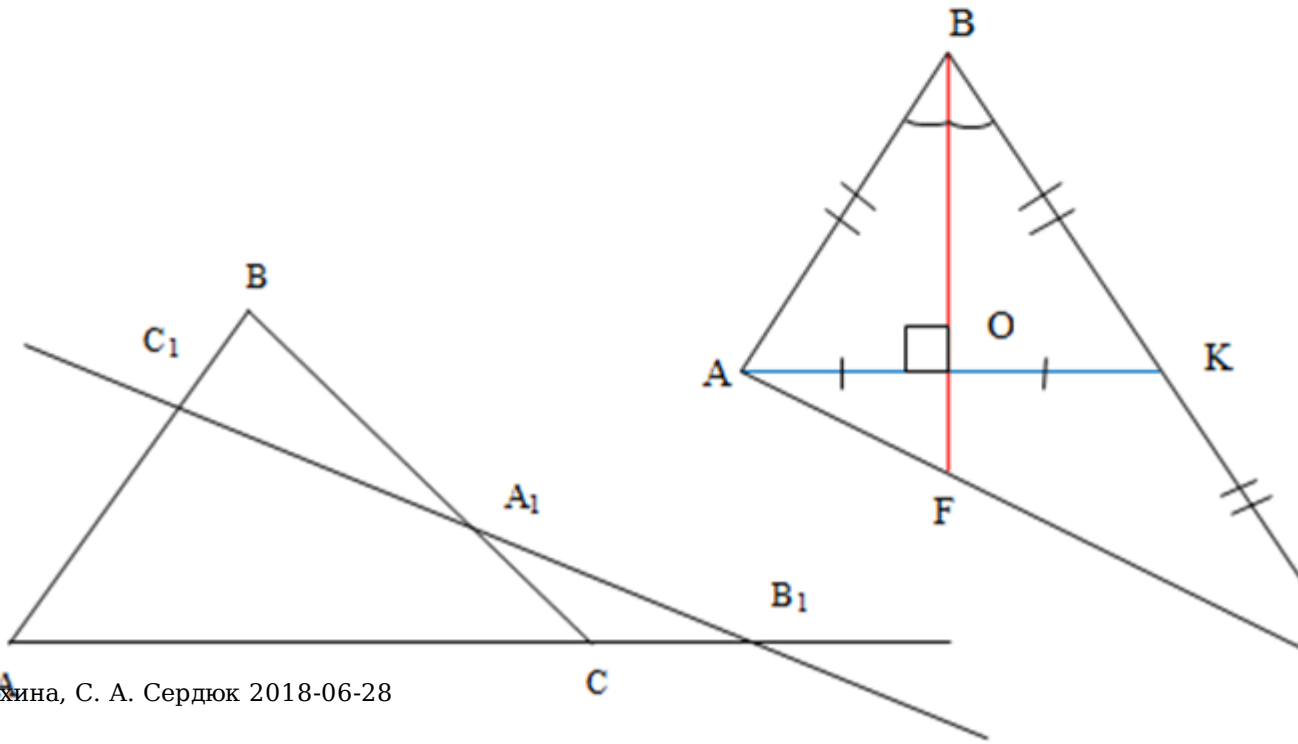


Рисунок 6. Применение теоремы Менелая

Заключение

Решая задачи вышеуказанными способами, изучая дополнительный материал, мы пришли к выводу, что существуют рациональные способы решения геометрических задач. С одноклассниками данную задачу решали первым способом, т.е. геометрическим (применяли дополнительное построение). При решении данной задачи самый рациональный способ (простой и доступный) – применение теоремы о средней линии треугольника. Метод площадей тоже несложный и удобный. Тригонометрический способ неудобен для больших чисел. При работе над темой, мы познакомились с теоремой Менелая. Способ ее применения оказался весьма оригинален и интересен. Считаю, что цель работы достигнута. Полученные знания пригодятся нам и моим одноклассникам при сдачи ОГЭ.

Список литературы

1. Атанасян, Л. С. Геометрия. 7-9 классы : учеб. общеобразоват. уч-реждений [Текст] / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2015. – 384 с.
2. Атанасян, Л. С. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений [Текст] / Л. С. Атанасян и др. – М. : Просвещение, 2011.
3. Балаян, Э. Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки и ОГЭ и ЕГЭ. 7-9 классы [Текст] / Э. Н. Балаян. – Ростов на/Д. : Феникс, 2015.
4. Высоцкий, И. Р. ОГЭ 2018. Математика. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ОГЭ [Текст] / И. Р. Высоцкий, Л. О. Рослова и т.д.; под редакцией И. В. Ященко. – М. : Издательство «Экзамен», 2018. – Вариант 15, С. 97.
5. Готман, Э. Г. Задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся. [Текст] / Э. Г. Готман. – М. : Просвещение, 1996.
6. Зив, Б. Г. Задачи по геометрии: пособие для учащихся 7-11 классов [Текст] / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер. – М. : Просвещение, 2014.

7. Теорема Менелая [Электронный ресурс] // Википедия. – Режим доступа : https://ru.wikipedia.org/wiki/ Теорема_Менелая.