УДК 373.5.016:514

**М. Е. Нагловский, С. В. Сафьянова**

**M. E. Naglovskiy, S. V. Safyanova**

Нагловский Максим Евгеньевич, ученик 10 класса, МБОУ «Лесоперевалочная СОШ № 2», РХ, с. Бельтирское, Аскизский район.

Сафьянова Светлана Викторовна, учитель математики, МБОУ «Лесоперевалочная СОШ № 2», РХ, с. Бельтирское, Аскизский район.

Naglovskiy Maxim Evgenyevich, 10-th form student, MBOU «Lesoperevalochnaya SOSH № 2», RH, Beltirskoye village, Askizsky district.

Safyanova Svetlana Victorovna, teacher of mathematics, MBOU «Lesoperevalochnaya SOSH № 2», RH, Beltirskoye village, Askizsky district.

# РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ ДВУМЯ СПОСОБАМИ

# SOLUTION OF TRIGONOMETRIC EXERCISES IN TWO WAYS

***Аннотация.*** *Статья посвящена решению тригонометрических упражнений двумя способами. Приводятся примеры упражнений, направленных на развитие математических знаний и познавательных универсальных учебных действий: на поиск способов и решений упражнений.*

***Annotation.*** *The article is devoted to solving trigonometric exercises in two ways. Examples of exercises aimed at the development of mathematical knowledge and cognitive universal educational activities are given: on the search for ways and solutions of exercises.*

***Ключевые слова:*** *геометрический и аналитический способы, тригонометрические формулы, основные тригонометрические функции.*

***Keywords:*** *geometric and analytical methods, trigonometric formulas, basic trigonometric functions.*

**Цель работы:** Изучить различные способы решения тригонометрических тождеств и примеров.

**Задачи:**

1. Изучить дополнительную литературу.
2. Рассмотреть особенности решения различных тригонометрических упражнений двумя способами.
3. Показать практическое применение полученных знаний и оценить степень сложности.
4. Познакомить одноклассников с результатами полученных исследований.

**Актуальность темы:** Углубить математические знания через особенности решения различных тригонометрических упражнений двумя способами.

**Предмет исследования:** тождества и примеры.

**Гипотеза:** в математике встречаются тригонометрические тождества и примеры, которые можно решать разными способами.

**Методы исследования:** поисковый, исследовательский.

**Практическая значимость исследовательской работы:** полученные знания при решении тригонометрических упражнений двумя способами можно использовать при решении подобных тождеств на ОГЭ и ЕГЭ.

Все упражнения и тождества решаются аналитическим или геометрическим способом.

## Основная часть

**1.** Вычислить tg 15°.

*I способ* (аналитический с помощью тригонометрических формул).

Применим формулу $\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha-\mathrm{tg}\beta)}{1+\mathrm{tg}\alpha*\mathrm{tg}\beta}$ [2].

$\mathrm{tg}\,15°=\mathrm{tg}(60°-45°)=\frac{\mathrm{tg}\,60-\mathrm{tg}45}{1+\mathrm{tg}60*\mathrm{tg}45}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)x^2}{2}=2\text{-}\sqrt{3}$

*II способ* (геометрический).

Рассмотрим равнобедренный ΔABC [3], где AB = BC с ∠ABC = 30°. Про
в нем высоты АД и BE. Тогда в ΔАДС ∠САД = 15°, а $\mathrm{tg}\,15°=\frac{\text{СД}}{\text{АД}}$. Пусть А
тогда в ΔАВД АВ = 2АД = 2*1 = 2, АВ = 2 и $\text{ВД}^2=\text{АВ}^2-\text{АД}^2=4-1=3$, ВД
Отсюда следует, что СД = 2 – √3 и $\mathrm{tg}\,15°=\frac{\text{ВД}}{\text{АД}}=2-\sqrt{3}$.

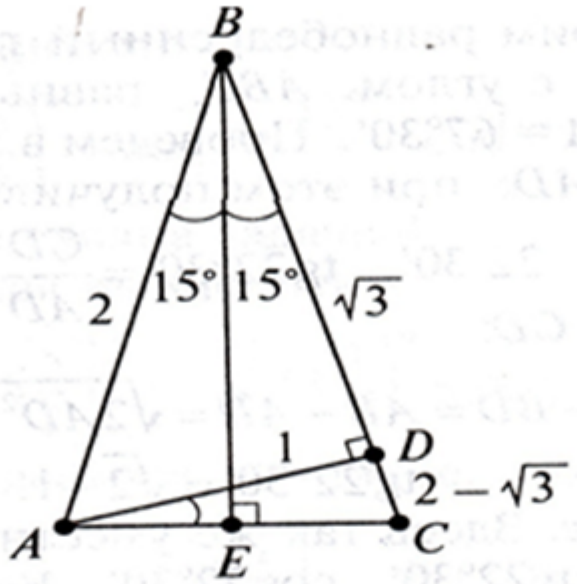


Рисунок 1. Геометрическое решение задачи 1

Геометрический способ интересен и не сложен.

**2.** Вычислить tg 22°30′.

*I способ.*

Применим формулу $\mathrm{tg}^2x=\frac{1-2\cos2x}{2}=\frac{1-\cos2x}{1+\cos2x}$ [2] и, подставив конкр
значения, получим:

$$\mathrm{tg}\,22°30'=\sqrt{\frac{1-\cos45}{1+\cos45}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{(\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})}{(\frac{2}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})}}=\sqrt{2}-1.$$

С помощью тригонометрической формулы легко решается.

*II способ* (рис. 2).

Рассмотрим равнобедренный ΔABC (AB = BC) с ∠ABC = 45°,
∠BCA = 67°30′. Проведем ΔABC высоту АД, при этом получившийся ∠САД
– (90° +67°30′) = 22°30′, tg 22°30′ = СД / АД. Пусть АД = 1, тогда вычисли
СД = BC – ВД = AB – ВД = √2-1, т. е получили tg 22°30′ = √2 – 1 [4].

**4.** Проверить равенство cos 40° + cos 80° = cos 20°.

*I способ.*

Применим формулу суммы косинусов двух у

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ [2].

cos 40° + cos 80° = 2 cos 60° * cos 20° = 2*1/2*cos 20° = cos 20°

*II способ* (рис. 4).

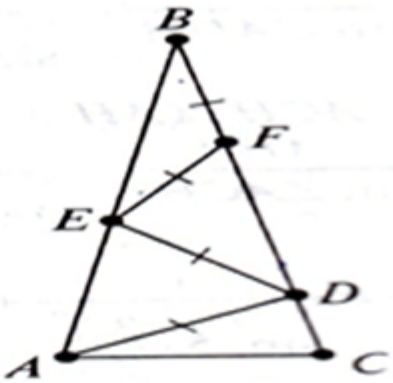


Рисунок 4. Геометрическое решение задачи 4

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC (AB = BC) с ∠ABC = Возьмем на стороне AB точку E, а на стороне BC точки Д и F такие BF = FE = ДA.

В ΔBEF: ∠EBF = ∠EFB = 20°.

В ΔДEF: ∠EFД = ∠EДF = 40°.

В ΔEДA: ∠AEД = ∠EAД = 60°, значит ΔEДA – равносторонний.

В ΔAДC: ∠ДAC = 20°, ∠AДC = 80° и ∠ACД = 80°. Получили, что ΔA равнобедренный (AД = AC) и подобен ΔABC.

Итак, BE + AE = BF + FД + ДC.

Пусть BF = 1, тогда BE = 2 cos 20°, AE + 1, FД = 2 cos 40°, ДC = 2 cos 80°.

Подставим полученные значения, получим 2 cos 20° + 1 = 1 + 2 cos 2 cos 80°, равенство cos 40° + cos 80° = cos 20° верно.

Интересный способ, но надо быть внимательным при вычислении граду меры углов.

**5.** Доказать тождество $\frac{1}{\sin 25\frac{5}{7}} = \frac{1}{\sin 51\frac{3}{7}} + \frac{1}{\sin 77\frac{1}{7}}$ [4].

*I способ.*

$\sin 51\frac{3}{7} = 2 * (25\frac{5}{7})$

$77\frac{1}{7} = 3 * \left(25\frac{5}{7}\right)$

$\sin 77\frac{1}{7} = \sin\left(180 - 77\frac{1}{7}\right) = \sin\left(102\frac{6}{7}\right) = \sin(25\frac{5}{7})$

Обозначим $\sin(25\frac{5}{7})$ за t, тогда данное выражение примет вид:

## Опрос учащихся

1. Одноклассникам (10 класс – всего 15 человек) нами было предложено решить задачи наиболее рациональным и понятным для них способом. В результате чего выявлено:

Решили аналитическим способом:

- все задачи – 6 человек;
- решили 4 задачи – 7 человек;
- решили 3 задачи – 11 человек.

Решили геометрическим способом, хотя бы одну задачу – 3 человек.

В итоге выявлено: аналитическим способом, т. е. с помощью применения тригонометрических формул, решают 73 % учащихся, а геометрическим способом – 20 %.

2. Учащимся 9а класса – всего 19 человек, предложено решить те же задания.

В результате чего было выявлено:

Решали аналитически, т. е. с помощью тригонометрических формул – 8 человек, т. к. не все тригонометрические формулы знают.

Геометрическим способом решили 6 человек.

Девятиклассниками было отмечено, что вычислить tg 22°30´ – не очень сложно. Доказать тождество cos 36° – cos 72° = 1/2 и вычислить sin 18° оказалось значительно сложнее. Не смогли доказать тождество $\frac{1}{\sin 25\frac{5}{7}} = \frac{1}{\sin 51\frac{3}{7}} + \frac{1}{\sin 77\frac{1}{7}}$.

## Заключение

Работа над данным исследованием показала, что изучение различных способов решения задач – не прихоть математиков, а объективная необходимость.

В ходе исследования было выявлено, что современной науке известно много способов, которые позволяют быстро и эффективно справиться с предложенными заданиями. У всех способов различные алгоритмы и степень сложности.

Были проработано два способа, показано их практическое применение, доказаны все недостатки и преимущества каждого из способов. Аналитический способ, позволяет вычислить, доказать, но надо знать тригонометрические формулы и быть внимательным при подсчете. Геометрический способ позволяет увидеть решение, но надо догадаться какую фигуру надо взять и в ней провести.

## Список литературы

1. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. [Текст] / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – М. : Мнемозина, 2010. – 226 с.
2. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. [Текст] / А. Г. Мордкович. – 10 изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 399 с.
3. Атанасян, Л. С. Геометрия. 7-9 классы : учеб. общеобразоват. уч-реждений [Текст] / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 384 с.
4. Математика в школе [Текст] // Научно-теоретический и методический журнал «Математика в школе», 2005. – № 7.