

УДК 373.5.016:514

М. Е. Нагловский, С. В. Сафьянова

M. E. Naglovskiy, S. V. Safyanova

Нагловский Максим Евгеньевич, ученик 10 класса, МБОУ «Лесоперевалочная СОШ № 2», РХ, с. Бельтирское, Аскизский район.

Сафьянова Светлана Викторовна, учитель математики, МБОУ «Лесоперевалочная СОШ № 2», РХ, с. Бельтирское, Аскизский район.

Naglovskiy Maxim Evgenyevich, 10-th form student, MBOU «Lesoperevalochnaya SOSH № 2», RH, Beltirskoye village, Askizsky district.

Safyanova Svetlana Victorovna, teacher of mathematics, MBOU «Lesoperevalochnaya SOSH № 2», RH, Beltirskoye village, Askizsky district.

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ ДВУМЯ СПОСОБАМИ

SOLUTION OF TRIGONOMETRIC EXERCISES IN TWO WAYS

Аннотация. Статья посвящена решению тригонометрических упражнений двумя способами. Приводятся примеры упражнений, направленных на развитие математических знаний и познавательных универсальных учебных действий: на поиск способов и решений упражнений.

Annotation. The article is devoted to solving trigonometric exercises in two ways. Examples of exercises aimed at the development of mathematical knowledge and cognitive universal educational activities are given: on the search for ways and solutions of exercises.

Ключевые слова: геометрический и аналитический способы, тригонометрические формулы, основные тригонометрические функции.

Keywords: *geometric and analytical methods, trigonometric formulas, basic trigonometric functions.*

Цель работы: Изучить различные способы решения тригонометрических тождеств и примеров.

Задачи:

1. Изучить дополнительную литературу.
2. Рассмотреть особенности решения различных тригонометрических упражнений двумя способами.
3. Показать практическое применение полученных знаний и оценить степень сложности.
4. Познакомить одноклассников с результатами полученных исследований.

Актуальность темы: Углубить математические знания через особенности решения различных тригонометрических упражнений двумя способами.

Предмет исследования: тождества и примеры.

Гипотеза: в математике встречаются тригонометрические тождества и примеры, которые можно решать разными способами.

Методы исследования: поисковый, исследовательский.

Практическая значимость исследовательской работы: полученные знания при решении тригонометрических упражнений двумя способами можно использовать при решении подобных тождеств на ОГЭ и ЕГЭ.

Все упражнения и тождества решаются аналитическим или геометрическим способом.

1. Вычислить $\text{tg } 15^\circ$.

I способ (аналитический с помощью тригонометрических формул).

Применим формулу $\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}(\alpha - \text{tg}\beta)}{1 + \text{tg}\alpha * \text{tg}\beta}$ [2].

$$\text{tg } 15^\circ = \text{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\text{tg } 60 - \text{tg}45}{1 + \text{tg}60 * \text{tg}45} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)x^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

II способ (геометрический).

Рассмотрим равнобедренный $\triangle ABC$ [3], где $AB = BC$ с $\angle ABC = 30^\circ$. Проведем в нем высоты AD и BE . Тогда в $\triangle ADC$ $\angle CAD = 15^\circ$, а $\text{tg } 15^\circ = \frac{CD}{AD}$. Пусть $AD = 1$, тогда в $\triangle ABD$ $AB = 2AD = 2 * 1 = 2$, $AB = 2$ и $BD^2 = AB^2 - AD^2 = 4 - 1 = 3$, $BD = \sqrt{3}$. Отсюда следует, что $CD = 2 - \sqrt{3}$ и $\text{tg } 15^\circ = \frac{BD}{AD} = 2 - \sqrt{3}$.

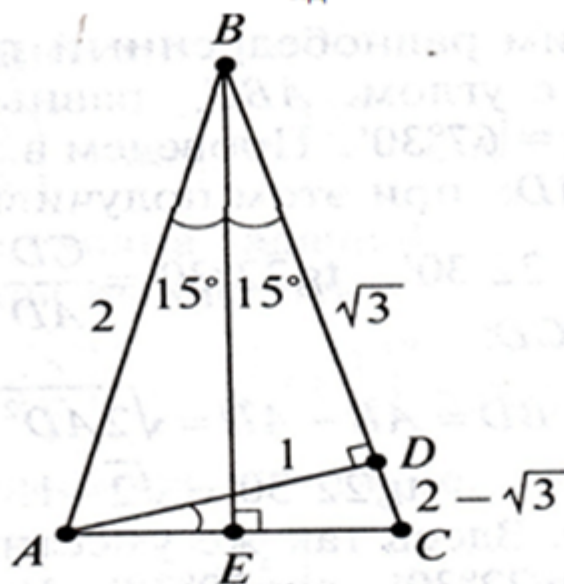


Рисунок 1. Геометрическое решение задачи 1

Геометрический способ интересен и не сложен.

2. Вычислить $\text{tg } 22^\circ 30'$.

I способ.

Применим формулу $\text{tg}^2 x = \frac{1 - 2 \cos 2x}{2} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ [2] и, подставив конкретные значения, получим:

$$\text{tg } 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45}{1 + \cos 45}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2} - 1.$$

С помощью тригонометрической формулы легко решается.

II способ (рис. 2).

Рассмотрим равнобедренный $\triangle ABC$ ($AB = BC$) с $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle BCA = 67^\circ 30'$. Проведем в $\triangle ABC$ высоту AD , при этом получившийся $\angle CAD = 90^\circ - (90^\circ + 67^\circ 30') = 22^\circ 30'$, $\text{tg } 22^\circ 30' = CD / AD$. Пусть $AD = 1$, тогда вычислим $CD = BC - BD = AB - BD = \sqrt{2} - 1$, т. е. получили $\text{tg } 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$ [4].

4. Проверить равенство $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ = \cos 20^\circ$.

I способ.

Применим формулу суммы косинусов двух углов α и β :

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad [2].$$

$$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ = 2 \cos 60^\circ \cdot \cos 20^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 20^\circ = \cos 20^\circ$$

II способ (рис. 4).

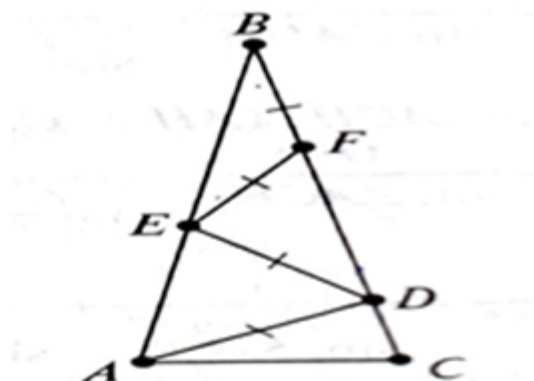


Рисунок 4. Геометрическое решение задачи 4

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с $\angle ABC = 120^\circ$. Возьмем на стороне AB точку E , а на стороне BC точки D и F такие, что $BF = FE = DA$.

В $\triangle BEF$: $\angle EBF = \angle EFB = 20^\circ$.

В $\triangle DEF$: $\angle EFD = \angle EDF = 40^\circ$.

В $\triangle EDA$: $\angle AED = \angle EAD = 60^\circ$, значит $\triangle EDA$ – равносторонний.

В $\triangle ADC$: $\angle DAC = 20^\circ$, $\angle ADC = 80^\circ$ и $\angle ACD = 80^\circ$. Получили, что $\triangle ADC$ равнобедренный ($AD = AC$) и подобен $\triangle ABC$.

Итак, $BE + AE = BF + FD + DC$.

Пусть $BF = 1$, тогда $BE = 2 \cos 20^\circ$, $AE = 1$, $FD = 2 \cos 40^\circ$, $DC = 2 \cos 80^\circ$.

Подставим полученные значения, получим $2 \cos 20^\circ + 1 = 1 + 2 \cos 40^\circ + 2 \cos 80^\circ$, равенство $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ = \cos 20^\circ$ верно.

Интересный способ, но надо быть внимательным при вычислении градусной меры углов.

5. Доказать тождество $\frac{1}{\sin 25^\circ} = \frac{1}{\sin 51^\circ} + \frac{1}{\sin 77^\circ}$ [4].

I способ.

$$\sin 51^\circ = 2 \cdot \left(\sin 25^\circ \cos 26^\circ \right)$$

$$\sin 77^\circ = 3 \cdot \left(\sin 25^\circ \cos 52^\circ \right)$$

$$\frac{1}{\sin 77^\circ} = \frac{1}{3 \cdot \left(\sin 25^\circ \cos 52^\circ \right)} = \frac{1}{3 \cdot \sin 25^\circ \cos 52^\circ} = \frac{1}{3 \cdot \sin 25^\circ \sin 38^\circ}$$

Обозначим $\sin(25^\circ)$ за t , тогда данное выражение примет вид:

Опрос учащихся

1. Одноклассникам (10 класс – всего 15 человек) нами было предложено решить задачи наиболее рациональным и понятным для них способом. В результате чего выявлено:

Решили аналитическим способом:

- все задачи – 6 человек;
- решили 4 задачи – 7 человек;
- решили 3 задачи – 11 человек.

Решили геометрическим способом, хотя бы одну задачу – 3 человек.

В итоге выявлено: аналитическим способом, т. е. с помощью применения тригонометрических формул, решают 73 % учащихся, а геометрическим способом – 20 %.

2. Учащимся 9а класса – всего 19 человек, предложено решить те же задания.

В результате чего было выявлено:

Решали аналитически, т. е. с помощью тригонометрических формул – 8 человек, т. к. не все тригонометрические формулы знают.

Геометрическим способом решили 6 человек.

Девятиклассниками было отмечено, что вычислить $\operatorname{tg} 22^{\circ}30'$ – не очень сложно. Доказать тождество $\cos 36^{\circ} - \cos 72^{\circ} = 1/2$ и вычислить $\sin 18^{\circ}$ оказалось значительно сложнее. Не смогли доказать

тождество
$$\frac{1}{\sin 25\frac{5}{7}} = \frac{1}{\sin 51\frac{3}{7}} + \frac{1}{\sin 77\frac{1}{7}}.$$

Заключение

Работа над данным исследованием показала, что изучение различных способов решения задач – не прихоть математиков, а объективная необходимость.

В ходе исследования было выявлено, что современной науке известно много способов, которые позволяют быстро и эффективно справиться с предложенными заданиями. У всех способов различные алгоритмы и степень сложности.

Были проработано два способа, показано их практическое применение, доказаны все недостатки и преимущества каждого из способов. Аналитический способ, позволяет вычислить, доказать, но надо знать тригонометрические формулы и быть внимательным при подсчете. Геометрический способ позволяет увидеть решение, но надо догадаться какую фигуру надо взять и в ней провести.

Список литературы

1. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. [Текст] / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – М. : Мнемозина, 2010. – 226 с.
2. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. [Текст] / А. Г. Мордкович. – 10 изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 399 с.
3. Атанасян, Л. С. Геометрия. 7-9 классы : учеб. общеобразоват. уч-реждений [Текст] / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 384 с.
4. Математика в школе [Текст] // Научно-теоретический и методический журнал «Математика в школе», 2005. – № 7.