

УДК 511

Е. Е. Рябина, Л. А. Осипова

E. E. Ryabinina, L. A. Osipova

Рябина Елизавета Евгеньевна, студентка 3 курса
ФМиТЭФ, НФИ КемГУ, г. Новокузнецк.

Осипова Людмила Александровна, к.п.н., доцент, НФИ
КемГУ, г. Новокузнецк.

Riabinina Elizaveta Evgenievna, 3-year student Physical-
mathematical and technological-economical faculty,
Novokuznetsk Institute (branch) of Kemerovo State University,
Novokuznetsk.

Osipova Ludmila Aleksandrovna, Candidate of Pedagogical
Sciences, associate Professor, Novokuznetsk Institute (branch)
of Kemerovo State University, Novokuznetsk.

ФУНКЦИЯ «АНТЬЕ» В ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧАХ

«ANTIE» FUNCTION IN THE OLYMPIAD TASKS

Аннотация. *Автором рассмотрено применение функции «антье» при решении олимпиадных задач различного уровня сложности.*

Annotation. *The author considers the application of the function «antie» in solving Olympiad problems of various complexity levels.*

Ключевые слова: *функция, целая часть числа, олимпиадные задачи, теория чисел.*

Keywords: *function, integer part of a number, Olympiad problems, number theory.*

Целой частью действительного числа α называется наибольшее целое число, не превосходящее α , т.е. целое число n , такое, что $n \leq \alpha < n+1$. Целая часть числа α обозначается $[\alpha]$. Следовательно,

$$[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1 \text{ [1, с. 48].}$$

Функцию от целого числа $[\alpha]$ называют функцией «антье».

Рассмотрим примеры олимпиадных задач, в которых используется функция «антье».

Задача 1. (V Соросовская олимпиада).

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3,9; \\ y+[z]+\{x\}=3,5; \\ z+[x]+\{y\}=2. \end{cases}$$

Решение: Пусть $a = [x]$, $\alpha = \{x\}$, $b = [y]$, $\beta = \{y\}$, $c = [z]$, $\gamma = \{z\}$, где a, b, c – целые числа, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$, $0 \leq \gamma < 1$.

В этих обозначениях система имеет вид

$$\begin{cases} a + \alpha + b + \gamma = 3,9; \\ b + \beta + c + \alpha = 3,5; \\ c + \gamma + a + \beta = 2. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим

$$\begin{aligned} 2(a + b + c + \alpha + \beta + \gamma) &= 9,4, \text{ то есть} \\ (a + b + c + \alpha + \beta + \gamma) &= 4,7. \end{aligned}$$

Вычитая из полученного уравнения последовательно первое, второе, третье уравнения системы, имеем

$$\begin{cases} c + \beta = 0,8; \\ a + \gamma = 1,2; \\ b + \alpha = 2,7. \end{cases}$$

откуда следует, что $c = 0$, $\beta = 0,8$, $a = 1$, $\gamma = 0,2$, $b = 2$, $\alpha = 0,7$.

Ответ: (1,7; 2,8; 0,2) [2, с. 16].

Задача 2.

Решите уравнение: $\sqrt{x + [x]} + \sqrt{x - [x]} = 1$.

Решение: Найдём ОДЗ системы: $x \geq 0$.

Рассмотрим два случая: $0 \leq x < 1$ и $x \geq 1$.

- Если $x \geq 1$, то $[x] \geq 1$ и $\sqrt{x + [x]} \geq \sqrt{2}$. В этом случае уравнение не имеет.
- Если же $0 \leq x < 1$, то $[x] = 0$ и уравнение принимает вид $2\sqrt{x} = 1$, отсюда $x = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задача 3.

Найти $[x]$, если $x = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2005}\right)^2$.

Решение: чтобы найти целую часть числа достаточно оценить данное

Так как $x = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2005}\right)^2$, то $x > 1$.

Оценим справа значение x . Так как

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)*n} \quad (n - \text{натуральное число}), \text{ то}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{1*2}, \left(\frac{1}{3}\right)^2 < \frac{1}{2*3}, \dots, \left(\frac{1}{2005}\right)^2 < \frac{1}{2004*2005}.$$

Получили:

$$x = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2005}\right)^2 < 1 + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \dots + \frac{1}{2004*2005}$$

$$x = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005};$$

$$x = 2 - \frac{1}{2005} < 2.$$

Значит $1 < x < 2$. Тогда $[x] = 1$.

Ответ: 1 [2, с. 19].

Задача 4.

Докажите, что $[(2 + \sqrt{3})^{2002}]$ – нечетное число.

Решение: запишем

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} = A + B\sqrt{3} \quad (1),$$

где A – сумма всех слагаемых, содержащих четную степень (натуральное число), а $B\sqrt{3}$ – сумма всех слагаемых, содержащих степень $\sqrt{3}$ (B – натуральное число).

Тогда

$$(2 - \sqrt{3})^{2002} = A - B\sqrt{3} \quad (2)$$

(по аналогии с $(2 + \sqrt{3})^{2002} = A + B\sqrt{3}$).

Суммируя (1) и (2), получим:

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} + (2 - \sqrt{3})^{2002} = 2A \quad (3)$$

и, перемножив (1) на (2), получим, что

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} * (2 - \sqrt{3})^{2002} = 1 \quad (4)$$

Из (3) получим:

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} = 2A - (2 - \sqrt{3})^{2002},$$

тогда

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} = 2A - 1 + 1 - (2 - \sqrt{3})^{2002} \quad (5).$$

Из (4) получаем:

Список литературы

1. Бухштаб, А. А. Теория чисел: Учебное пособие [Текст] / А. А. Бухштаб. – 3-е изд., стер. – СПб. : Издательство «Лань», 2008. – 384 с.: ил.
2. Евсюк, С. Л. Математика. Решение задач повышенной сложности [Текст] / С. Л. Евсюк. – Минск : «Мисанта», 2003. – 44 с.
3. Абрамов, А. М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа [Текст] / А. М. Абрамов, Б. М. Ивлев. – М. : «Просвещение», 1990.