УДК 511

Е. Е. Рябинина, Л. А. Осипова

E. E. Ryabinina, L. A. Osipova

Рябинина Елизавета Евгеньевна, студентка 3 курса ФМиТЭФ, НФИ КемГУ, г. Новокузнецк.

Осипова Людмила Александровна, к.п.н., доцент, НФИ КемГУ, г. Новокузнецк.

Riabinina Elizaveta Evgenievna, 3-year student Physical-mathematical and technological-economical faculty, Novokuznetsk Institute (branch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk.

Osipova Ludmila Aleksandrovna, Candidate of Pedagogical Sciences, associate Professor, Novokuznetsk Institute (branch) of Kemerovo State University, Novokuznetsk.

ФУНКЦИЯ «АНТЬЕ» В ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧАХ

«ANTIE» FUNCTION IN THE OLYMPIAD TASKS

Аннотация. *Автором рассмотрено применение функции «антье» при решении олимпиадных задач различного уровня сложности.*

Annotation. *The author considers the application of the function «antie» in solving Olympiad problems of various complexity levels.*

Ключевые слова: *функция, целая часть числа, олимпиадные задачи, теория чисел.*

Keywords: *function, integer part of a number, Olympiad problems, number theory.*

Целой частью действительного числа α называется наибольшее целое число, не превосходящее α, т.е. целое число n, такое, что $n \leq \alpha < n+1$. Целая часть числа α обозначается [α]. Следовательно,

$[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$ [1, с. 48].

Функцию от целого числа [α] называют функцией «антье».

Рассмотрим примеры олимпиадных задач, в которых используется функция «антье».

Задача 1. (V Соросовская олимпиада).

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3{,}9; \\ y+[z]+\{x\}=3{,}5; \\ z+[x]+\{y\}=2. \end{cases}$$

Решение: Пусть $a = [x]$, $\alpha = \{x\}$, $b = [y]$, $\beta = \{y\}$, $c = [z]$, $\gamma = \{z\}$, гд целые числа, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$, $0 \le \gamma < 1$.

В этих обозначениях система имеет вид

$$\begin{cases} a + \alpha + b + \gamma = 3{,}9; \\ b + \beta + c + \alpha = 3{,}5; \\ c + \gamma + a + \beta = 2. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим

$$2\,(a + b + c + \alpha + \beta + \gamma)=9{,}4, \text{ то есть}$$

$$(a + b + c + \alpha + \beta + \gamma) = 4{,}7.$$

Вычитая из полученного уравнения последовательно первое, второе уравнения системы, имеем

$$\begin{cases} c + \beta = 0{,}8; \\ a + \gamma = 1{,}2; \\ b + \alpha = 2{,}7. \end{cases}$$

откуда следует, что $c = 0$, $\beta = 0{,}8$, $a = 1$, $\gamma = 0{,}2$, $b = 2$, $\alpha = 0{,}7$.

Ответ: (1,7; 2,8; 0,2) [2, с. 16].

Задача 2.

Решите уравнение: $\sqrt{x + [x]} + \sqrt{x - [x]} = 1$.

Решение: Найдём ОДЗ системы: $x \ge 0$.

Рассмотрим два случая: $0 \le x < 1$ и $x \ge 1$.

- Если $x \ge 1$, то $[x] \ge 1$ и $\sqrt{x + [x]} \ge \sqrt{2}$. В этом случае уравнение реш имеет.
- Если же $0 \le x < 1$, то $[x] = 0$ и уравнение принимает вид $2\sqrt{x} = 1$, от $x = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задача 3.

Найти [x], если $x = 1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{4})^2 + \ldots + (\frac{1}{2005})^2$.

Решение: чтобы найти целую часть числа достаточно оценить данно

Так как $x = 1 + (\frac{1}{2})2 + (\frac{1}{3})2 + \ldots + (\frac{1}{2005})2$, то $x > 1$.

Оценим справа значение x. Так как

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)*n} \text{ (n – натуральное число), то}$$

$$(\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{1*2},\ (\frac{1}{3})^2 < \frac{1}{2*3},\ \ldots,\ (\frac{1}{2005})^2 < \frac{1}{2004*2005}.$$

Получили:

$$x = 1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3})^2 + \ldots + (\frac{1}{2005})^2 < 1 + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \ldots + \frac{1}{2004*2005}$$

$$x = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005};$$

$$x = 2 - \frac{1}{2005} < 2.$$

Значит $1 < x < 2$. Тогда $[x] = 1$.

Ответ: 1 [2, с. 19].

Задача 4.

Докажите, что $[(2 + \sqrt{3})^{2002}]$ – нечетное число.

Решение: запишем

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} = A + B\sqrt{3} \qquad (1),$$

где A – сумма всех слагаемых, содержащих четную степень натуральное число), а $B\sqrt{3}$ – сумма всех слагаемых, содержащих степень $\sqrt{3}$ (B – натуральное число).

Тогда

$$(2 - \sqrt{3})^{2002} = A - B\sqrt{3} \qquad (2)$$

(по аналогии с $(2 + \sqrt{3})^{2002} = A + B\sqrt{3}$).

Суммируя (1) и (2), получим:

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} + (2 - \sqrt{3})^{2002} = 2A \qquad (3)$$

и, перемножив (1) на (2), получим, что

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} * (2 - \sqrt{3})^{2002} = 1 \qquad (4)$$

Из (3) получим:

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} = 2A - (2 - \sqrt{3})^{2002},$$

тогда

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} = 2A - 1 + 1 - (2 - \sqrt{3})^{2002} \qquad (5).$$

Из (4) получаем:

Список литературы

1. Бухштаб, А. А. Теория чисел: Учебное пособие [Текст] / А. А. Бухштаб. – 3-е изд., стер. – СПб. : Издательство «Лань», 2008. – 384 с.: ил.
2. Евсюк, С. Л. Математика. Решение задач повышенной сложности [Текст] / С. Л. Евсюк. – Минск : «Мисанта», 2003. – 44 с.
3. Абрамов, А. М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа [Текст] / А. М. Абрамов, Б. М. Ивлев. – М. : «Просвещение», 1990.