Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании, 2024. № 2 (89). infed.ru

УДК 372.851

А. А. Волгина

A. A. Volgina

Волгина Алёна Александровна, магистрант, КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ», г. Новокузнецк, Россия.

Научный руководитель: Осипова Людмила Александровна, к. п. н., доцент, КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ», г. Новокузнецк, Россия.

Volgina Alena Alexsandrovna, master's student, Kuzbass Humanitarian Pedagogical Institute of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russia.

Scientific supervisor: Osipova Lyudmila Aleksandrovna, candidate of pedagogical sciences, associate professor, Kuzbass Humanitarian Pedagogical Institute of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russia.

ВЫБОР СПОСОБА ОТБОРА КОРНЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

CHOOSING THE METHOD OF ROOT SELECTION WHEN SOLVING TRIGONOMETRIC EQUATIONS

Аннотация. *В статье анализируются способы отбора корней тригонометрических уравнений при помощи числовой окружности и двойного неравенства. Автор рассматривает случаи, в которых их применение более рационально. А также приводит алгоритмы для каждого способа отбора корней.*

Annotation. *The article analyzes the methods of selecting the roots of trigonometric equations using a numerical circle and a double inequality. The author considers cases in which their application is more rational. And also provides algorithms for each method of root selection.*

Ключевые слова: *тригонометрические уравнения, способы отбора корней уравнений, числовая окружность, двойное неравенство.*

Keywords: *trigonometric equations, methods for selecting solutions of equations, numerical circle, double inequality.*

Решение тригонометрических уравнений и отбор корней, принадлежащих заданному промежутку – это одна из тем, которая входит в задания ЕГЭ по математике профильного уровня уже более 10 лет. Анализ работ показывает, что многие учащиеся приступают к решению этого задания и испытывают затруднения, как правило, в ходе отбора корней, принадлежащих заданному промежутку. Поэтому в ходе подготовки к экзамену необходимо сформировать и отработать это умение, а также научить правильно и достаточно полно оформлять выбранный способ отбора корней.

В учебно-методической литературе можно встретить четыре основных способа отбора корней тригонометрических уравнений: алгебраический способ (решение двойного неравенства); арифметический способ (перебор по параметру); геометрический способ (с помощью числовой окружности); графический (с помощью графика функции) [2].

При решении тригонометрического уравнения, как правило, можно использовать любой из перечисленных способов, но только один из них оказывается самым простым и рациональным.

Как показывает практика, самым простым и удобным, а также, быстрым, является геометрический способ отбора корней. При помощи единичной окружности можно отобрать сразу все нужные корни из всех совокупностей решений. Остальные способы не дают такой возможности.

Разберем алгоритм отбора по шагам:

- построим единичную окружность;
- отмечаем на окружности границы заданного промежутка;
- выделяем дугу, соответствующую промежутку. Обратите внимание, что промежуток всегда отмечается против часовой стрелки и от меньшего значения к большему;
- отмечаем корни тригонометрического уравнения, называя их;
- записываем в ответ корни.

Рассмотрим пример 1.

а) Решите уравнение $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right].$

Решение.

а) Преобразуем левую часть уравнения при помощи формул приведения:

$$\sin x + \sin x = -1 \Leftrightarrow 2\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни (рис. 1), принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. [1].

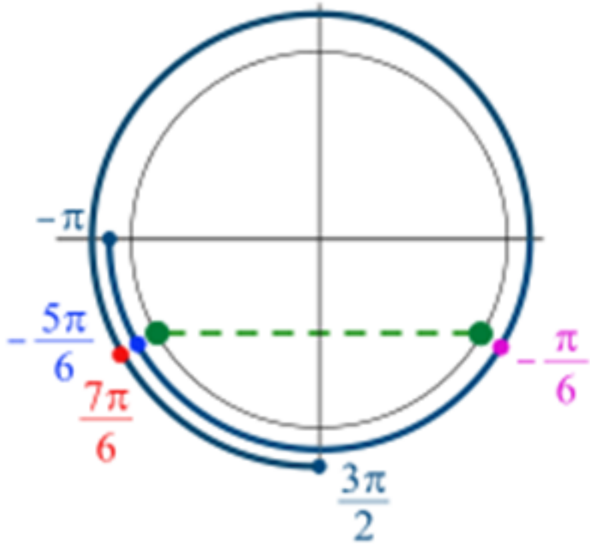

Рисунок 1. Модель отбора корней

1. Строим числовую окружность.
2. Отмечаем на окружности начало промежутка –п, далее движемся по окружности в положительном направлении (против часовой стрелки), пока не доходим до правого конца промежутка $\frac{3\pi}{2}$, после этого выделяем на окружности заданный промежуток.
3. Отмечаем точками на окружности (рис. 1) только те корни, которые попадают в заданный промежуток:

$$x_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$x_2 = -\frac{5\pi}{6}$$

$$x_3 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

Делаем вывод, что на указанном промежутке лежат числа $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in Z, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$; б) $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

А теперь рассмотрим решение того же задания, используя алгебраический способ (с помощью двойного неравенства). Данным способом удобно пользоваться, если промежуток, предложенный в условии задачи больше 2п. Этот способ достаточно прост в использовании, но требует больше внимательности и безошибочных расчетов. Кроме того, алгебраический способ требует хорошо отработанных навыков решения двойных неравенств и работы с дробными числами.

При решении примера 1 были получены две серии корней: $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ и $x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

Отберем корни, используя двойное неравенство:

$$-\pi \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le \frac{3\pi}{2}$$

Так задача сводится к нахождению таких целых значений k, при которых это неравенство будет верным. Нам остается только его решить относительно k:

$$\frac{\pi}{6} - \pi \le 2\pi k \le \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$
$$\frac{\pi}{6} - \frac{6\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{9\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$$
$$-\frac{5\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{5\pi}{3}$$
$$-\frac{5\pi}{6\cdot 2\pi} \le \frac{2\pi k}{2\pi} \le \frac{5\pi}{3\cdot 2\pi}$$
$$-\frac{5}{12} \le k \le \frac{5}{6}$$

Вспоминаем, что k – это только целые числа.

В результате получаем: k = 0 и k = 1.

Подставляем найденное k = 0 в тот набор решений, для которого мы решали неравенство: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 0 = -\frac{\pi}{6} + 0 = -\frac{\pi}{6} \in [-\pi; \frac{3\pi}{2}].$

Подставляем найденное k = 1 в тот набор решений, для которого мы решали неравенство: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \in [-\pi; \frac{3\pi}{2}]$.

Осталось рассмотреть второй набор решений.

$$-\pi \le -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le \frac{3\pi}{2}$$

Проделываем точно такие же шаги.

$$\frac{5\pi}{6} - \pi \le 2\pi k \le \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}$$
$$\frac{5\pi}{6} - \frac{6\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{9\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}$$
$$-\frac{\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{14\pi}{6}$$
$$-\frac{1}{12} \le k \le \frac{14}{12}$$

Целых значений k, удовлетворяющих двойному неравенству, может быть сколько угодно.

Получилось: k = 0 и k = 1.

Подставляем найденное k = 0 в тот набор решений, для которого мы решали неравенство: $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 0 = -\frac{5\pi}{6} \in [-\pi; \frac{3\pi}{2}]$.

Подставляем найденное k = 1 в тот набор решений, для которого мы решали неравенство: $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = -\frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \in [-\pi; \frac{3\pi}{2}]$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

Рассмотренные примеры показывают, что геометрический способ достаточно прост, имеет много преимуществ, является самым универсальным, но его использование требует хороших навыков работы с единичной окружностью. Алгебраическим способом удобно пользоваться в случаях, когда в решении уравнения только одна серия решений, а также, если промежуток, в условии задачи превышает 2п.

Список литературы

1. Ларин, А. А. Тренировочный вариант № 279. / А. А. Ларин. – Текст : электронный. – URL : https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=502134 (дата обращения : 04.11.2023).
2. Осипова, Л. А. Один из способов отбора крней уравнений в заданиях единого государственного экзамена. / Л. А. Осипова, В. Б. Гридчина. – Текст : электронный // Инфрмационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании: электронный научный журнал, 2019. – № 3 (50). – С. 52-55.