Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании, 2025. № 3 (96). *infed.ru*

УДК 372. 851

В. Б. Гридчина, Л. А. Осипова

V. B. Gridchina, L. A. Osipova

Гридчина Валентина Борисовна, к. п. н., доцент, КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ», г. Новокузнецк, Россия.

Осипова Людмила Александровна, к. п. н., доцент, КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ», г. Новокузнецк, Россия.

Gridchina Valentina Borisovna, candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, Kuzbass Humanitarian Pedagogical Institute of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russia.

Osipova Ludmila Alexandrovna, candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, Kuzbass Humanitarian Pedagogical Institute of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russia.

ВАРИАЦИИ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

VARIATIONS OF THE GRAPHICAL METHOD IN SOLVING THE EQUATION WITH THE PARAMETER

Аннотация. *В статье рассматриваются два способа решения задачи с параметром, в основе которых используется графический метод. Авторы выделяют виды задач, решения которых наиболее рационально с помощью этого метода. А также показывают, как может меняться ход решения задачи в зависимости от графической интерпретации её условия.*

Annotation. *The article discusses two ways to solve the problem with parameter based on the graphical method. The authors identify the types of tasks that can be solved most efficiently using this method. They also show how the course of solving a problem can change depending on the graphical interpretation of its condition.*

Ключевые слова: *уравнение с параметром, графический метод решения, графики функций.*

Keywords: *equation with a parameter, graphical solution method, graphs of functions.*

При решении уравнений с параметрами вида $f(x) = g(x,a)$ (1) предпочтение отдается графическому методу, если $y = g(x,a)$ задает на плоскости множество параллельных прямых, либо пучок прямых с угловым коэффициентом, зависящим от параметра a. Наиболее простой вид уравнение (1) принимает в случае, когда правая часть задает множество прямых, параллельных оси OX. Кроме того, графический метод определения числа корней уравнения в зависимости от входящего в него параметра является более удобным, чем аналитический.

Одно и то же уравнение с параметром можно решать по-разному, в зависимости от его графической интерпретации. На примере одной задачи покажем, как при разных подходах меняется её решение.

Задача. Найдите все значения a, при которых уравнение $a|x-3| = \frac{2}{x+1}$ на промежутке $[0;\infty)$, имеет ровно два корня [1].

Решение 1. Перейдем к графической интерпретации: $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x+1}; \\ y = a|x-3|. \end{cases}$

Уравнение $y = \dfrac{2}{x+1}$ определяет гиперболу с вертикальной асимптотой $x = -1$ и горизонтальной асимптотой $y = 0$.

Уравнение $y = a|x-3| = \begin{cases} ax - 3a, если x \geq 3; \\ -ax + 3a, если x < 3. \end{cases}$ задает множество лучей с общим началом в точке (3;0) и симметричных относительно прямой $x = 3$.

Можно заметить, что при $a \leq 0$, исходное уравнение не имеет решений. Определим, для каких положительных а графики функций имеют ровно две общие точки при $x \geq 0$.

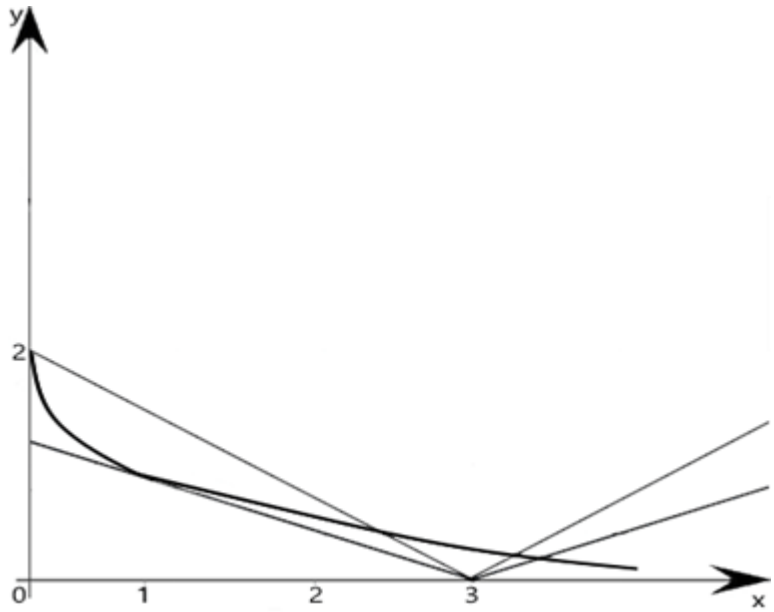

Рисунок 1. Графическая иллюстрация решения 1

При $x > 3$ прямая $y = ax - 3a$ пересекает гиперболу и поэтому одно решение уже есть (рис. 1). Нужно установить, когда прямая $y = -ax + 3a$ при $x < 3$ имеет одну общую точку с гиперболой.

Найдем, при каких *a* прямая *y = –ax + 3a* касается гиперболы $y=\frac{2}{x+1}$. Запишем условия касания: $\begin{cases}\frac{-2}{(x_0+1)^2}=-a;\\ \frac{2}{x_0+1}=-ax_0+3a.\end{cases}$ Откуда $a=\frac{1}{2}, x_0=1$. Далее находим, что при $a=\frac{2}{3}$ прямая *y = –ax + 3a* проходит через точку (0;2). Итак, при $a=\frac{1}{2}$ и при $a>\frac{2}{3}$ уравнение имеет ровно два корня на промежутке [0;∞).

Ответ: $a\in\left(\frac{2}{3};\infty\right);\frac{1}{2}$.

Рассмотрим другое решение этой задачи.

Решение 2. При $x \geq 0$ и $a \neq 0$ исходное уравнение можно записать в виде $|x-3|(x+1)=\frac{2}{a}$.

Введем функции: $y=\begin{cases}(x-3)(x+1), если x\geq 3;\\ -(x-3)(x+1), если x<3.\end{cases}$ и $y=\frac{2}{a}$. Обозначим $b=\frac{2}{a}$.

Сделаем чертеж при *x*≥0.

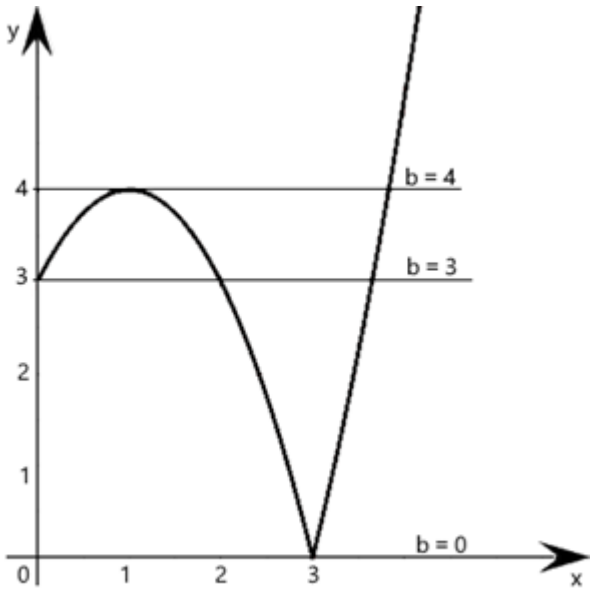

Рисунок 2. Графическая иллюстрация решения 2

Из чертежа (рис. 2) видно, при каких значениях b прямая $y = b$ имеет две точки пересечения с графиком функции. Запишем условия: $0 < b < 3$ или $b = 4$, откуда $0 < \frac{2}{a} < 3$ или $\frac{2}{a} = 4$.

Получаем, при $a > \frac{2}{3}$ и при $a = \frac{1}{2}$ уравнение имеет ровно два неотрицательных корня.

Ответ: $a \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right); \frac{1}{2}$.

Итак, решение 2 получилось более простым и рациональным. Поэтому при использовании графического метода в уравнениях с параметрами на определение числа корней второй подход наиболее предпочтителен.

Список литературы

1. Гущин, Д. Д. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ : Образовательный портал для подготовки к экзаменам : [сайт]. – URL: https://math-ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 8.01.2025). – Текст : электронный.

© Гридчина В. Б., Осипова Л. А., 2025