Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании, 2025. № 3 (96). *infed.ru*

УДК 372.851

В. А. Комарова, Н. А. Нонь

V. A. Komarova, N. A. Non

Комарова Вера Алексеевна, студентка, КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ», г. Новокузнецк, Россия.

Нонь Наталья Александровна, ст. преподаватель, КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ», г. Новокузнецк, Россия.

Komarova Vera Alekseevna, student, Kuzbass Humanitarian Pedagogical Institute of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russia.

Non Natalia Alexandrovna, senior lecturer, Kuzbass Humanitarian Pedagogical Institute of Kemerovo State University, Novokuznetsk, Russia.

МНОГООБРАЗИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

A VARIETY OF METHODS FOR SOLVING QUADRATIC EQUATIONS

Аннотация. *Статья посвящена проблеме обучения школьников решению квадратных уравнений, которые встречаются в заданиях государственной итоговой аттестации по математике в 9 и 11 классах. Рассматриваются как традиционные, так и нестандартные методы решения уравнений такого вида, включая те, что не входят в школьный курс математики.*

Annotation. *The article is devoted to the problem of teaching schoolchildren to solve quadratic equations, which are found in the tasks of the state final assessment in mathematics in grades 9 and 11. Both traditional and non-standard methods for solving equations of this type are considered, including those that are not included in the school mathematics course.*

Ключевые слова: *квадратные уравнения, традиционные методы решения, нестандартные методы решения, государственная итоговая аттестация по математике.*

Keywords: *quadratic equations, traditional methods of solving, non-standard methods of solving, state final certification in mathematics.*

В настоящее время мы сталкиваемся с квадратными уравнениями во многих областях науки. Даже в школьных предметах, это не только математика, но и информатика, физика, химия. Если говорить о применении уравнений такого вида с практической стороны, то получим широчайший круг использования: от ремонта и строительства, до расчета норм правильного питания. Поэтому данная тема достаточна актуальна на сегодняшний день. Ведь умение решать различными методами квадратные уравнения могут пригодиться при решении более сложных задач, в том числе и при сдаче ОГЭ и ЕГЭ.

В данном исследовании мы подробно рассмотрели несколько наиболее распространенных и интересных методов, каждый из которых обладает своими достоинствами и недостатками. Выбор метода всегда зависит от конкретного уравнения и точности необходимого решения.

Рассмотрим несколько методов, которые чаще всего рассматриваются и применяются в школьном курсе математики:

1. Использование формул: нахождение корней, ориентируясь на вид квадратного уравнения – оно может быть общего вида, приведенным, с четным вторым

коэффициентом, либо используя формулу дискриминанта [1].

2. Использование теоремы Виета: нахождение корней только приведенного квадратного уравнения или уравнения, сведенного к такому виду, при выполнении двух условий – сумма корней уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену [1].
3. Метод разложения квадратного уравнения на множители: необходимо разложить левую часть уравнения на множители, после чего каждый из множителей приравнивают нулю, то есть разбивают данное уравнение на 2 линейных уравнения, решив которые, находят корни исходного уравнения [1].
4. Метод выделения квадрата двучлена: опирается на применение формулы сокращенного умножения, выделяем квадрат двучлена из имеющегося уравнения – для этого прибавим и вычтем одно и тоже число, если это необходимо для образования квадрата двучлена.
5. Графический метод решения квадратных уравнений: сводится к преобразованию уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ к виду $ax^2 = -bx - c$, построению графиков двух функций $y = ax^2$ (парабола) и $y = -bx - c$ (прямая) и нахождению их точки пересечения – абсциссы точек пересечения и будут являться решением уравнения.

В школьном курсе математики основным методом является применение формул дискриминанта, тем самым делая его самым универсальным и часто применяемым и при получении дальнейшего образования. Однако, данный метод отнимает достаточно много времени. Знание и умение применять различные виды решения квадратных уравнений могут значительно упростить выполнение заданий повышенной сложности, олимпиадных задач, а также ряда тем высшей математики.

К нестандартным методам можно отнести следующие:

1. Геометрический метод решения квадратного уравнения: основывается на идее представления квадратного

уравнения графически [3]. Чтобы решить уравнение $x^2 = a$, древние математики поступали так: x^2 обозначали как квадрат со стороной x. Решить уравнение $x^2 = a$, значит найти такой отрезок x, что площадь квадрата, построенного на этом отрезке, была бы равной a. При таком подходе к решению уравнение могло иметь только один положительный корень, а уравнение $x^2 = 0$ вообще не имело корней [5].

2. Метод решения при помощи циркуля и линейки: сначала необходимо найти и построить центр окружности – точку $O\left(-\frac{b}{2a};\frac{c+2a}{2a}\right)$ [3]. Затем построить точку **A (0;1)**. После этого проводится окружность радиуса ОА. Абсциссы точек пересечения окружности с осью Ох и будут корнями уравнения (рис. 1).

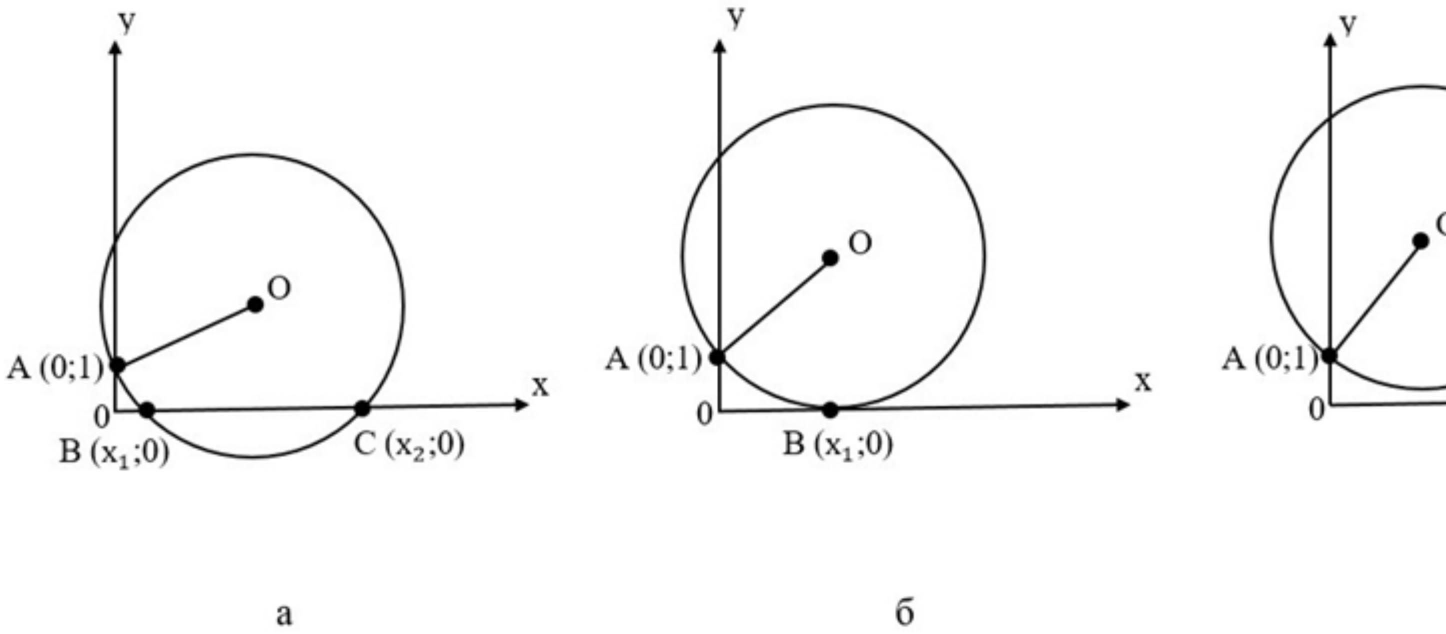

Рисунок 1. Определение корней квадратного уравнения

При этом возможны три случая:

1) радиус окружности больше ординаты центра (рис. 1 а);

2) радиус окружности равен ординате центра, окружность касается оси в единственной точке Ox (рис. 1 б);

3) радиус окружности меньше ординаты центра, окружность не имеет общих точек с осью ***Ox*** (рис. 1 в) [3].

1. Метод решения при помощи номограммы: это чертёж, с помощью которого можно, не производя вычислений, получать приближённое решение уравнений или приближённые значения функций (рис. 2) [2].

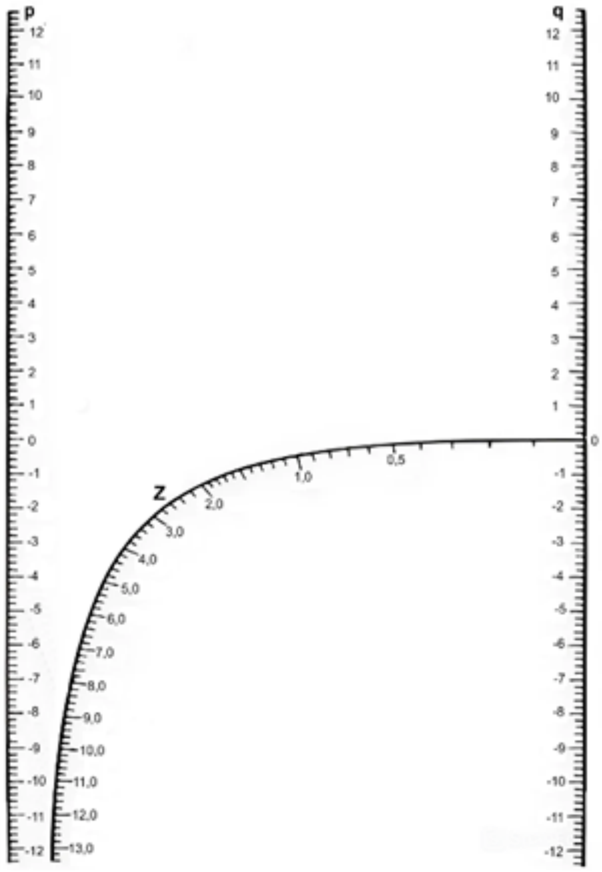

Рисунок 2. Номограмма

Для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$ необходимо на чертеже найти значение коэффициентов p и q и через эти точки провести прямую. Точка пересечения этой прямой с кривой на номограмме и будет решением. Особенностями решения уравнений при помощи номограммы являются положительные значения корней; отрицательные корни ищут по той же номограмме, сделав замену: $z = -t$; если коэффициенты p и q в ыходят за пределы шкал, то выполняют подстановку $z = k \cdot t$ [3]***<m:omath style=""><m:r style=""></m:r></m:omath>***.

1. Метод коэффициентов: анализируя коэффициенты, можно сразу найти корни уравнения.

1). Если коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c =$ удовлетворяют условию $a + \varepsilon b + c = 0$, где $\varepsilon = \pm 1$, то уравнение имеет два корн $x_1 = \varepsilon$, $x_2 = \frac{\varepsilon c}{a}$.

2). Сумма коэффициентов квадратного уравнения: $ax^2 + bx + c = 0$ [7].

a) Если выполняется условие $a + b + c = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

b) Если выполняется условие $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

3). Метод решения квадратных уравнений вида: $ax^2 \pm (a^2 + 1)x \pm a = 0$.

a) В уравнениях вида $ax^2 + (a^2 + 1)x + a = 0$ корни $x_1 = -a$, $x_2 = -\frac{1}{a}$.

b) В уравнениях вида $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ корни $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{a}$.

c) В уравнениях вида $ax^2 + (a^2 + 1)x - a = 0$ корни $x_1 = -a$, $x_2 = \frac{1}{a}$.

d) В уравнениях вида $ax^2 - (a^2 + 1)x - a = 0$ корни $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{a}$.

10. Метод «переброски»: коэффициент $\boldsymbol{a}$ умножается на свободный как бы «перебрасывается» к нему. Обе части уравнения $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, г $\boldsymbol{0}$, умножим $\boldsymbol{a}$ и получим уравнение $\boldsymbol{a^2x^2+abx+ac=0}$, где $\boldsymbol{a\neq 0}$. $\boldsymbol{ax=y}$, откуда $\boldsymbol{x=\frac{y}{a}}$; тогда приходим к уравнению $\boldsymbol{y^2+by+a}$ равносильному данному. Его корни $\boldsymbol{y_1}$ и $\boldsymbol{y_2}$ найдем с помощью теоремы $\boldsymbol{x_1=\frac{y_1}{a}}$ и $\boldsymbol{x_2=\frac{y_2}{a}}$.

Покажем многообразие методов решения квадратного уравнен следующем примере. Найти корни уравнения $\boldsymbol{x^2-2x-8=0}$ [4].

Решение 1. Найдем корни квадратного через дискриминант.

$\boldsymbol{D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36}$; $\boldsymbol{D>0}$ ⇒ уравнение имеет два

Корни уравнения: $\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 6}{2}}$; $\boldsymbol{x_1=-2}$, $\boldsymbol{x_2=4}$.

Ответ: -2; 4.

Решение 2. Так как второй коэффициент квадратного уравнения ч $(b=2\boldsymbol{k})$, воспользуемся формулой для нахождения корней: $\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}}$

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-8)}}{1}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{1}=1\pm 3;\ x_1=-2,\ x_2=4.}$$

Ответ: -2; 4.

Решение 3. По теореме Виета имеем: $\boldsymbol{\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1x_2=-8. \end{cases}}$

Этой системе удовлетворяют числа -2 и 4.

Ответ: -2; 4.

Решение 4. Рассмотрим графический метод решения квадратного урав преобразуем $\boldsymbol{x^2-2x-8=0}$ уравнение в $\boldsymbol{x^2=2x+8}$. Построим в одной с координат графики функций $\boldsymbol{y=x^2}$ и $\boldsymbol{x=2x+8}$ (рис. 3).

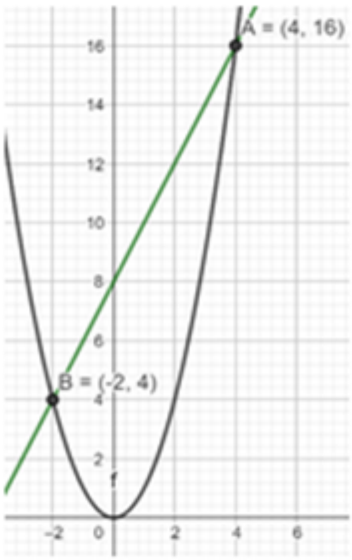

Рисунок 3. Графики функций

Таким образом, многообразие методов решения примера дает возможность применять тот, который наиболее удобен в конкретной ситуации, при этом гарантируя совпадение результатов. Однако для учащихся, данная тема ограничивается применением формул без особого их понимания. Универсальность математических методов определяет значимость математики в формировании у учащихся умений решать задачи, возникающие в процессе практической деятельности человека. Поэтому мы считаем, что существует необходимость переноса данной темы в задания с практико-ориентированным содержанием. Применение практико-ориентированных заданий обеспечит повышение интереса учащихся к учебной деятельности и формирование мотивации на уроках [6].

Формулы для нахождения корней позволяют быстро и эффективно решать уравнения. Геометрический метод и метод решения квадратного уравнения при помощи циркуля и линейки дают наглядные решения, но не всегда имеют высокую точность результатов и может потеряться отрицательный корень. Метод выделения полного квадрата и метод разложения левой части квадратного уравнения на множители требуют определенных знаний, но могут быть полезны для специальных уравнений. Графический метод решения квадратного уравнения нагляден, но с помощью него не всегда можно получить точное решение уравнения. Использование теоремы Виета и метода «переброски» может значительно упростить поиск решения квадратного уравнения. Решение с помощью номограммы достаточно специфическое и может помочь при необходимости быстро определить корни без высокой точности результата, но не всегда под рукой имеется сама номограмма.

После анализа различных методов решения квадратных уравнений можно сделать вывод, что у каждого метода есть свои положительные и отрицательные стороны, что делает один способ удобнее другого в зависимости от конкретного уравнения, а выбор метода зависит от конкретного квадратного уравнения и предпочтений того, кто решает.

Список литературы

1. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями : учебное пособие для вузов / Н. В. Богомолов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2024. – 755 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-16210-3. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/544898 (дата обращения: 05.01.2025).
2. Брадис, В. М. Четырехзначные математические таблицы / В. М. Брадис. – 13-е изд. – Москва : Дрофа, 2010. – 93 с. – Текст : непосредственный.
3. Галимова, А. А. О Нестандартных методах решения квадратных уравнений / А. А. Галимова. – Текст : электронный // Научная электронная библиотека «КиберЛенинка» : [сайт]. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-nestandartnyh-metodah-resheniya-kvadratnyh-uravneniy/viewer (дата обращения: 10.01.2025).
4. Каталог заданий. Квадратные уравнения. // СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ : [сайт]. – URL: https://oge.sdamgia.ru/test?theme=43 (дата обращения: 10.01.2025). – Текст : электронный.
5. Колягин, Ю. М. Алгебра / 8 класс / Ю. М. Колягин. – Текст: электронный // 11 KLASOV: [сайт]. – URL: https://go.11klasov.net/1373-algebra-8-klass-kolyagin-yum-tkacheva-mv-i-dr.html (дата обращения: 12.01.2025).
6. Опарина, С. А. Практико-ориентированные задания как средство повышения мотивации изучения математики учащимися 7-9 классов / С. А. Опарина, Н. А. Нонь – Текст : непосредственный. // Развитие личности в образовательном пространстве : Материалы XX Всероссийской с международным участием научно-практической конференции, Бийск, 26 мая 2022 года. – Бийск: Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет им. В. М. Шукшина, 2022. – С. 358-362. – EDN KQRYPT.
7. Способы решения квадратных уравнений / А. Р. Гасанов, А. А. Курамшин, А. А. Ельков [и др.]. – Текст : электронный // Юный ученый. – 2016. – № 6.1 (9.1). – С.

17-20. – URL: https://moluch.ru/young/archive/9/636/ (дата обращения: 13.01.2025).
