А. Н. Санникова

Научный руководитель: к.п.н., доцент М. С. Рябова.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЯМИ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ

Материал, связанный с уравнениями и неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики. Однако решению уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, уделяется достаточно мало внимания. Актуальность рассмотрения данной темы обусловлена противоречием между тем, что задания, содержащие модуль регулярно встречаются в материалах ЕГЭ и тем, что их решение, вызывают у учащихся значительные трудности.

Анализ учебников по алгебре для 7-9-х классов и пособий по алгебре и началам анализа для 10-11-х классов показал, что в каждом учебнике задания, содержащие модуль, используются для проверки знаний и умений, приобретенных во время изучения той или иной темы. Во всех рассмотренных учебниках понятие и свойства модуля используются при вычислении значений выражений, решении простейших уравнений и неравенств. Ни одно из проанализированных пособий не содержит системного изложения теоретического материала и такого набора заданий, который позволил бы обобщить и систематизировать знания о методах решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, что требуется для подготовки к ЕГЭ.

Одним из методических приемов организации повторения темы «Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля» является применение системы специально сконструированных решений таких уравнений и неравенств с различными ошибками, недочетами, неточностями. Это позволит не только повторить, но и скорректировать знания и умения, так как в процессе такой работы «сильные» ученики смогут получить новые знания, а «слабые» - ликвидировать пробелы и постепенно подтянуться к «сильным».

Рассмотрим примеры заданий с различными ошибками, недочетами, неточностями.

1. Решить уравнение: $2|x+1|=3x$

Решение.

Модуль может раскрываться со знаком плюс или минус, поэтому уравнение распадается на два:

а) $2x + 2 = 3x$;

$x = 2$

б) $-2x - 2 = 3x$

$x = -\frac{2}{5}$

Ответ 2; $\frac{2}{5}$.

Методический комментарий. Если есть ученики, которые не видят ошибки в решении этой задачи, им следует предложить подставить полученные корни в исходное уравнение и убедиться, что $x = 2$ будет корнем, а $x = \frac{2}{5}$ -нет. Причина в том, что уравнение $2x + 2 = 3x$ получается из исходного при

$x + 1 \geq 0$

Корень $x = 2$ этому неравенству удовлетворяет.

А уравнение $-2x - 2 = 3x$ равносильно исходному уравнению при

$x + 1 < 0$

И число

$x = \frac{2}{5}$

являясь корнем уравнения $-2x - 2 = 3x$, неравенству

$x + 1 < 0$

не удовлетворяет. А значит, его нужно отбросить.

После этого необходимо напомнить учащимся схему решения уравнений и неравенств с модулем, называемую «метод интервалов», и продемонстрировать ее на примере этого уравнения:

План решения уравнений с модулем методом интервалов.

1. Найти ОДЗ (область допустимых значений) уравнения.

2. Найти нули выражений, стоящих под знаком модуля.

3. Разбить область допустимых значений уравнения на интервалы.

4. Найти решение уравнения на каждом интервале и проверить, входит ли полученное решение в рассматриваемый интервал.

5. Записать корни уравнения, учитывая все полученные значения переменной.

Таким образом, верное решение уравнения можно оформить в следующем виде:

а) $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2(x+1) = 3x \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x \geq -1, \\ 2x+2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

б) $\begin{cases} x+1 < 0, \\ -2(x+1) = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ -2x-2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \quad x \in \varnothing$

Ответ: 2.

2. Решить уравнение: $|x-1| + |x-2| = 1$.

Решение.

Применяем метод интервалов. Нули подмодульных выражений: 1 и 2.

а) $\begin{cases} x \leq -1 \\ 1-x+2-x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

б) $\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x-1+2-x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 1 = 1 \end{cases}$

Так как x сократился, то решений нет;

в) $\begin{cases} x \geq 2, \\ x-1+x-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x = 2 \end{cases} \quad x = 2$

Ответ: 1;2.

Методический комментарий. Ошибка допущена при рассмотрении пункта б). Система

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ 1 = 1 \end{cases}$$

означает, что при *x*Е (1;2) уравнение превращается в тождество, а это значит, что любое значение *x* из данного промежутка является корнем уравнения. То есть ответ на данном промежутке будет *x* Е (1;2), а в итоговом ответе нужно добавить еще полученные на других промежутках точки 1 и 2.

Ответ: [1; 2].

Но можно предложить более красивый способ решения. Вспомним о геометрическом смысле модуля. Для решения нашего уравнения нужно найти такие точки на числовой прямой, для которых сумма расстояний до точек 1 и 2 равняется 1. Ясно, что этому условию удовлетворяют все точки отрезка *x* Е [1; 2] Точно так же ясно, что для точек вне этого отрезка сумма указанных расстояний будет больше 1.

1. Решить неравенство: $|4-x|<2$.

Решение.

Подмодульное выражение равно нулю при *x* = 4. Применяя метод интервалов, рассматриваем неравенство на двух промежутках:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x \ge 4, \\ 4-x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4; +\infty)$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} x < 4, \\ -4+x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 4]$$

Объединяем получившиеся решения.

Ответ: *x* Е(-∞; +∞)

Методический комментарий. Выражение, стоящее под знаком модуля, в самом деле, равно нулю при *x* = 4. Но у учащихся часто формируется стереотип, что справа от точки *x* = 4 это выражение положительно, а слева - отрицательно. На самом деле знак выражения под знаком модуля каждый раз нужно определять. В данном случае в выражении 4 - x перед *x* стоит знак минус, поэтому справа от числа 4 выражение будет отрицательным, а слева - положительным. Значит:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x \ge 4, \\ -4+x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4, \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4; 6)$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} x < 4, \\ 4-x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; 4)$$

Но, конечно, решать такую задачу методом интервалов явно не стоит.

Гораздо проще: $|4-x|<2 \Leftrightarrow -2<4-x<2 \Leftrightarrow x \in (2;6)$

Другой способ решения этого неравенства состоит в использовании геометрической интерпретации модуля и переформулировать задание следующим образом: найти те значения x, при которых расстояние от точки x до точки 4 будет меньше 2. Совершенно ясно, что это значения х лежащие между 2 и 6.

При подготовке Единому государственному экзамену по математике, учителю необходимы такие технологии обучения и организации итогового повторения, которые позволят выпускникам демонстрировать уровень своих знаний не ниже своей годовой отметки.

Особое внимание стоит обратить на формулировки вопросов. Привыкнув к традиционным формулировкам «Выполните действия», «Решите уравнение», «Решите систему неравенств» и т.п., ученики могут испытывать затруднения, если вопрос задается нестандартно. В заданиях ЕГЭ представлен широкий спектр таких вопросов, например:

1. Решить уравнение $|2x-5|-|3x-8|=0$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответ запишите их сумму.

Решение:

Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль в точках

$$2x-5=0 \leftrightarrow 2x=5 \leftrightarrow x=\frac{5}{2} \leftrightarrow x=2{,}5$$

$$3x-8=0 \leftrightarrow 3x=8 \leftrightarrow x=\frac{8}{3} \leftrightarrow x \approx 2{,}66$$

Эти точки делят числовую прямую на три промежутка (интервала). Отметим на числовой прямой эти точки и расставим для каждого из подмодульных выражений на полученных интервалах знаки.

Таким образом, нам нужно рассмотреть три случая - когда x находится в каждом из интервалов.

Случай 1: $x < 2{,}5$. раскроем модули с учетом их знаков:

$$-(2x-5)+(3x-8)=0,$$

$$x=3.$$

Полученное значение $x = 3$не удовлетворяет условию $x < 2{,}5$ и потому не является корнем исходного уравнения.

Случай 2: $2{,}5 \le x \le \frac{8}{3}$.

$(2x-5)+(3x-8)=0,$

$x=2{,}6.$

Полученное значение x принадлежит рассматриваемому промежутку.

Случай 3: $x > \frac{8}{3}$. Раскроем модули с учетом их знаков:

$(2x-5)-(3x-8)=0,$

$x=3$

Полученное значение x так же принадлежит рассматриваемому промежутку.

Уравнение имеет два корня 2,6 и 3 , поэтому находим сумму этих корней 2,6 + 3 = 5,6

Ответ: 5,6

2. Найдите число целых решений неравенства, принадлежащих промежутку. $|2x-3| > x+2,\ x \in [-4;\ 5]$.

Решение:

$$\begin{cases} 2x-3 \ge 0, \\ 2x-3 > x+2; \end{cases} \begin{cases} 2x-3 < 0, \\ -(2x-3) > x+2; \end{cases}$$

а) $\begin{cases} 2x-3 \ge 0, \\ 2x-3 > x+2; \end{cases} \begin{cases} x \ge 1{,}5, \\ x-5 > 0; \end{cases} \begin{cases} x \ge 1{,}5, \\ x > 5; \end{cases}$

Получаем промежуток $x \epsilon [1{,}5; 5)$.

б) $\begin{cases} 2x-3 < 0, \\ -(2x-3) > x+2; \end{cases} \begin{cases} x < 1{,}5, \\ x < \frac{1}{3}; \end{cases}$

Получаем промежуток $x \epsilon (\frac{1}{3}; 1{,}5)$.

Рассмотрим три промежутка $x \in [-4;\ 5], x \epsilon [1{,}5; 5), x \epsilon (\frac{1}{3}; 1{,}5)$.

Отсюда следует, что $x \epsilon (\frac{1}{3}; -4]$. Число целых решений неравенства из этого промежутка будет 5 (0,-1, -2, -3, -4).

Ответ: 5.

Систему работы по подготовке к ЕГЭ в 11-м классе целесообразно организовать «по содержательным блокам».

Каждая тема в таком блоке предваряется необходимой справочной информацией, представленной в максимально сжатой форме. Затем подробно разбирается большое количество примеров. Затем идут тренировочные упражнения, которые даются в традиционной форме. Изучение темы должно заканчиваться выполнением самостоятельной работы контролирующего характера.

Таким образом, рассмотренные методические приемы организации повторения и коррекции имеют следующие достоинства:

1) поддерживается интерес к излагаемому материалу у всех учеников, независимо от уровня их подготовки;

2) воспитываются самоконтроль и критическое отношение к излагаемому материалу;

3) вырабатываются необходимые навыки и алгоритмы поиска ошибок и недочетов в собственных рассуждениях и выкладках.

Список литературы

1. Зеленский А. С. Использование специально сконструированных ошибочных и нерациональных решений задач для повторения и коррекции знаний учащихся.// Математика в школе- 2012- №2- с. 24-33.

2. Зеленский А. С. Панфилов И.И. Решение уравнений и неравенств с модулем. - М.: УниверПресс, 2009. - 112 с.

3. Методы решения уравнений, содержащих знак модуль [электронный ресурс] // [сайт] : URL : http://mmetodika.narod.ru/page/urav1.htm (дата обращения 10.10.2014).