А. А. Бычковская

Научный руководитель: ст.преп.кафедры Математики и методики обучения математике В. В. Алдакишкина.

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В N-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Основоположниками теории квадратичных форм являются Ферма и Эйлер. Но еще Диофант располагал общими приемами решения диофантовых уравнений до четвертой степени в рациональных положительных числах. Задачи Диофанта привели Ферма к поиску целочисленных решений квадратных уравнений с двумя неизвестными. Ферма рассмотрел задачу представимости числа в виде

Эйлер, а затем Лагранж полностью решили задачу Ферма о двух квадратах. Ими же были рассмотрены и другие конкретные квадратичные формы. Также Лагранжу принадлежат многие идеи в этой теории, в частности, он ввел важное понятие приведенной формы, с помощью которого им была доказана конечность числа классов бинарных квадратичных форм заданного дискриминанта. Затем эта теория значительно была расширена Гауссом, который ввел много новых понятий, на основе которых ему удалось получить доказательства трудных и глубоких теорем теории чисел, ускользавших от его предшественников в этой области.

Квадратичные формы используются для решения многих физических, технических и геометрических задач; в дифференциальной геометрии: первая квадратичная форма и вторая квадратичная форма поверхности. Первая квадратичная форма служит, прежде всего, для измерения бесконечно малых дуг на поверхности. Через первую квадратичную форму можно определить площади любых участков поверхности. Вторая квадратичная форма описывает поверхность во втором приближении. Она показывает, как отклоняется поверхность от касательной плоскости и полностью определяет кривизну поверхности. Также квадратичные формы применяются при исследовании функций нескольких переменных на экстремум.

Но в основном квадратичные формы нужны для приведения квадрик к каноническому виду. Рассмотрение квадрик на проективной плоскости позволяет расширить знания геометрии с помощью алгебры и, наоборот.

Существует три основных метода приведения квадратичной формы к каноническому виду: метод Лагранжа, Метод Якоби и Метод приведения квадратичной формы к каноническому виду путем ортогонального преобразования.

Квадратичной формой от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется однородный многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ второй степени от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Если в квадратичной форме переменные подвергнуть линейному преобразованию, то получится новая квадратичная форма. Эта новая квадратичная форма называется каноническим видом исходной квадратичной формы.

Одним из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду является метод Лагранжа. Можно показать это на примере:

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2.$$

Если в квадратичной форме переменные подвергнуть линейному преобразованию, то получится новая квадратичная форма. Эта новая квадратичная форма называется каноническим видом исходной квадратичной формы.

Одним из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду является метод Лагранжа. Можно показать это на примере:

Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2.$$

Воспользуемся методом Лагранжа. Выделим полные квадраты. В этом примере полные квадраты можно выделить следующим образом:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2.$$

Если сделать замену переменных, то получим:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2 + 2x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

Квадратичная форма принимает вид:

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2.$$

Квадратичная форма принимает вид:

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2.$$

Если подвергнуть квадратичную форму какому-либо другому линейному преобразованию, то получим квадратичную форму, имеющую совершенно другой вид.

Замечаем, что если рассмотрим различные линейные преобразования, в частности ортогональные, приводящие квадрику к каноническому виду, то виды новой квадратичной формы отличаются друг от друга, но есть нечто общее между этими записями новых квадратичных форм. Это описывается законом инерции квадратичных форм:

«Если данная квадратичная форма приведена к каноническому виду с помощью двух различных линейных преобразований, то число положительных коэффициентов при квадратах новых переменных, так же как и число отрицательных коэффициентов, будет в обоих случаях одно и то же».

Пусть дана квадратичная форма в A_3:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

1 способ.

Выполним преобразование переменных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - 3y_3, \\ x_2 = \qquad y_2 - 2y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad \frac{1}{2}y_3. \end{cases}$$

Подставим преобразованные переменные в квадратичную форму:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 = y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2.$$

В результате элементарных преобразований получили квадратичную форму:

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2.$$

2 способ.

Матрица данной квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполним преобразование переменных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 6y_3, \\ x_2 = \qquad -y_2 - 4y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad y_3. \end{cases}$$

Матрицей преобразования переменных является:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица Q' имеет вид:

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -6 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу данной квадратичной формы можно вычислить по формуле:

$$B = Q'AQ.$$

Очевидно, что решение задачи связано с линейными операциями над матрицами. Это говорит о том, что теория квадратичных форм в многомерной геометрии тесно связана с теорией матриц в теории высшей алгебры.

Произведя вычисления с матрицами получим матрицу вида:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Таким образом получаем квадратичную форму:

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + 12y_3^2$$

Квадратичная форма в евклидовом пространстве приводится к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования (а не произвольного линейного). С геометрической точки зрения это означает переход к новой прямоугольной декартовой системе координат, получаемой из исходной прямоугольной декартовой системы координат с помощью вращения вокруг начала координат.

Так как квадратичные формы нужны не сами по себе, а для приведения квадрик к каноническому виду, поэтому необходимо знать собственные значения, и собственные векторы матрицы квадратичной формы.

Если собственные числа матрицы различны, то можно доказать, что собственные векторы, соответствующие этим собственным числам ортогональны, а значит, образуют ортогональную систему векторов в евклидовом пространстве.

Покажем это на примере. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_3x_4.$$

Матрица этой квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 0.$

Находим $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3', \vec{e}_4'$:

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0\right).$$

$$\vec{e}_2' = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = \left(0; 0; \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

$$\vec{e}_3' = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \left(0; 0; \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

$$\vec{e}_4' = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; 0\right).$$

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2' = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_3 + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_4, \\ \vec{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_3 - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_4, \\ \vec{e}_4' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2. \end{cases}$$

Искомое ортогональное преобразование:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_4, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_4, \\ x_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_3, \\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_3. \end{cases}$$

Так как $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 0$, то искомый канонический вид:

$$2y_1^2 + 4y_2^2 - y_3^2.$$

Как уже было сказано, квадратичная форма применяется для приведения квадрик к каноническому виду, так как для того, чтобы определить вид квадрик на плоскости или в пространстве необходимо уравнение квадрики записать в таком виде, чтобы в этом уравнении отсутствовали произведения переменных. А это можно сделать с помощью преобразования квадратичной формы к каноническому виду.

Теорию квадратичных форм можно использовать в курсе алгебры и начала анализа при изучении, например, параболы и гиперболы. Показать ученикам, что парабола и гипербола это уравнения квадрик в двумерном евклидовом пространстве. В профильных классах можно предложить ученикам самим привести уравнения квадрики к каноническому виду в двумерном пространстве, так как понятия определитель и матрица ученики изучают в школе. Также можно учащимся предложить выступить на конференции с докладом по этой теме.