УДК 372.851

Д. С. Зеленин

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Лесоперевалочной СОШ №2, с. Бельтирское, Аскизский район.

ЧЕТЫРЕ СПОСОБА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Аннотация. *Тема, затронутая в статье, касается решения несколькими способами уравнения с параметром, направленная на личностное развитие учащихся. Рассмотрены этапы реализации образовательного проекта и, следуя этим этапам, разработан проект по математике для учащихся 9 классов на тему «Четыре способа решения одной задачи с параметром».*

Определить число решений уравнения $|x+2| = a\,x + 1$ в зависимости от значения параметра a.

I способ (аналитический).

Уравнение $|x+2| = a\,x+1$ определено при любом действительном значении параметра a и равносильно следующим системам:

1. $\begin{cases} x+2 \ge 0, \\ x+2 = a\cdot x + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -2, \\ x\cdot(1-a) = a\cdot x + 1; \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} x \ge -2, \\ a = 1, \\ x\cdot(1-a) = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge -2, \\ a = 1, \\ x\cdot(1-1) = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge -2, \\ a = 1, \\ x\cdot 0 = -1; \end{cases}$

Решений нет.

2) $\begin{cases} x \ge -2, \\ a \ne 1, \\ x = 1/(a-1); \end{cases}$

2.1 $1/(a-1) \ge -2,$

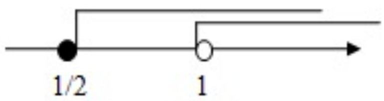
$1/(a-1)+2 \ge 0,$

$1/(2a-2) \ge 0,$

$(2a-1)/(a-1) \ge 0,$

$\begin{cases} 2a-1 \ge 0, \\ a-1 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a \ge 1/2, \\ a > 1. \end{cases}$

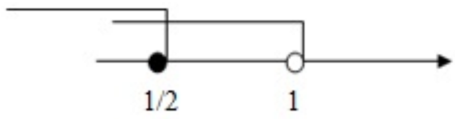


(1; +∞)

Рис. 1. График 1

2.2 $\begin{cases} 2a-1 \le 0, \\ a-1 < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a \le 1/2, \\ a < 1. \end{cases}$



(-∞; 1/2)

Рис. 2. График 2

Ответ: при a Є (-∞;1/2)U(1; +∞); x = 1/(a-1).

2. $\begin{cases} x+2 < 0, \\ -x-2 = a\cdot x + 1; \end{cases}$

Рассмотрим 2 случая:

1. $\begin{cases} a = -1, \\ x < -2, \\ x\cdot(-1+1) = -3; \end{cases}$

$\begin{cases} a = -1, \\ x < -2, \\ x\cdot 0 = -3; \end{cases}$

Решений нет.

При -1<a <1/2 уравнение имеет два корня x1= 1/(a-1) и x2=-3/(a+1).

Если a=1/2, то x1=x2=-2.

Если a≤-1, или a=0,5 или a>1, то x=1/(a-1) – одно решение.

Если 0,5<a≤1, то уравнение не имеет решений.

Интересный способ, но важно рассмотреть все случаи.

II способ (использование координатной плоскости (x; a)) (рис. 5)

1. Пусть x=0, тогда │0+2│=a*0+1, получаем 2=1 – неверно, решений нет.

При любом значении параметра *a* значение x=0 не является конем уравнения │x+2│= a x+1.

2. Пусть x≠ 0, тогда a= (-1+│x+2│)/x

Если x≥ -2, то a=(-1+x+2)/x=(x+1)/x=1+1/x

a=1+1/x. Построим таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Зависимость параметров x и a

x	-2	-1	-1/2	1	2	3
a	0,5	5	-1	2	1,5	4/3

Если x< -2, то a=(-1-x-2)/x= (-x-3)/x = -1-3/x.

a=-1-3/x. Построим таблицу (табл. 2)

Таблица 2

Зависимость параметров x и a

x	-5	-4	-3	-2
a	-2/5	-1/4	0	0,5

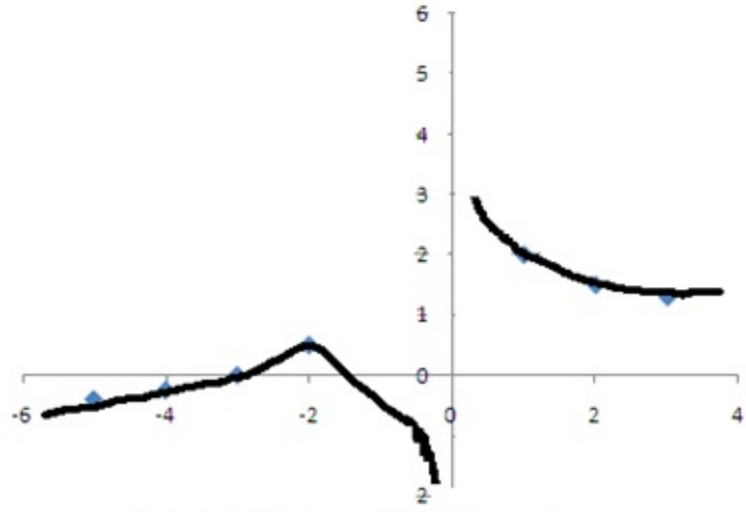


Рис. 5. Графический способ решения

На рисунке 5 мы видим, что при a>1, a=1/2, a≤ -1 – уравнение имеет одно решение.

При -1<a<1/2 – два решения и при 1/2 <a ≤ 1- решений нет.

Быстро, просто, доступно на экзамене.

III способ (поворот прямой).

Построим графики функций y=│x+2│и y = a x+1 (рис. 6).

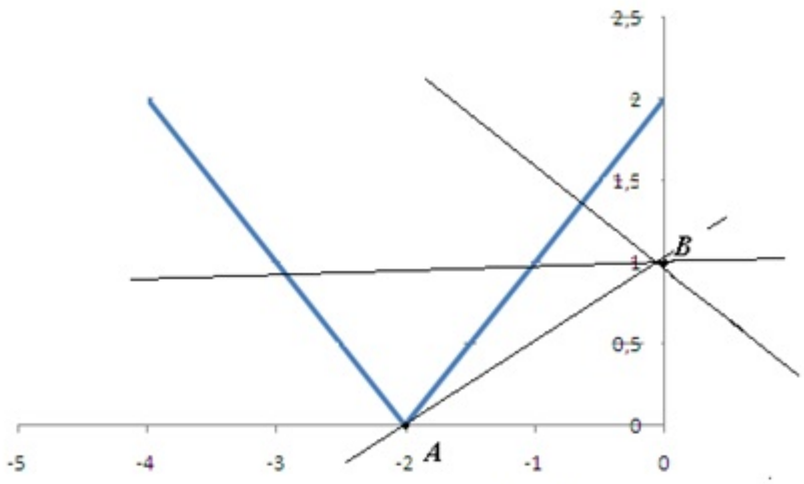


Рис. 6. Графики функций y=│x+2│и y= ax+1

y=│x+2│ – графиком является угол, вершина которого находится в точке A(-2; 0).

Функция y= ax+1 – семейство прямых, каждая из которых проходит через точку B (0;1), т.е. прямые вращаются вокруг точки

Если прямая y= ax+1 параллельна прямой y=x+2, то графики функций y=│x+2│и y= ax+1 общих точек не имеют, следовательно уравнение не имеет решений.

Если a>1, то прямая y= ax+1 будет поворачиваться против часовой стрелки и обязательно пересечется с прямой y=x+2. следовательно, уравнение имеет единственное решение.

Продолжим поворачивать прямую по часовой стрелке. Прямая y= ax+1 пересекает обе стороны угла y=|x+2|до тех пор, пока не станет параллельна прямой y =-x-2. Тогда получаем a=-1. Следовательно, при -1<a<1/2 уравнение имеет два решения, а при a=-1 – одно решение. При дальнейшем уменьшении значения параметра *a,* будет пересекать только одну сторону угла, следовательно, уравнение будет иметь только одно решение.

Этот способ в школе не рассматривается и поэтому интересен, но сложен, требуется терпения и понимания.

IV способ (параллельный перенос).

Построим графики функций y1 = ||2x|-1| (рис. 7).

Таблица 3

Зависимость y от x

x	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2
y	3	1	0	1	0	1	3

y_2= x-a – семейство прямых.

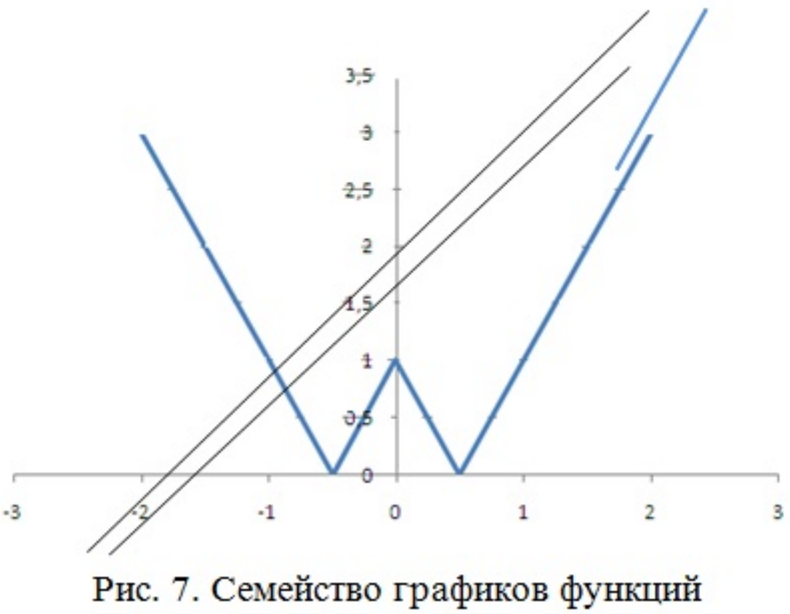


Рис. 7. Семейство графиков функций

График функции y1= ||2x|-1| касается оси Ox в точках A(-0,5;0) и B (0,5;0).

Прямая y2= x-a имеет ровно три точки пересечения с графиком функции y1 тогда и только тогда, когда она проходит через точку A или точку C(0;1). Во всех остальных случаях количество точек пересечения графиков функций y1= ||2x|-1| и y2= x-a будет или больше, или меньше трех. Найдем значения параметра a в первом и втором случаях.

Пусть прямая y2= x-a проходит через точку A, тогда 0=-1/2 –a, значит a=1/2.

Если прямая y2= x-a проходит через точку C, то a= -1. a= -1/2 или a= -1.

Способ легкий и его можно применять на ОГЭ.

Список литературы

1. Мордкович, А. Г. Алгебра, 9 класс. В 2-х томах [Текст]. / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев, Л. И. Звавич [и др.]. – М.: Мнемозина. – 2015. – 509 с.
2. Открытый урок [Электронный ресурс]. – Первое сентября. – Режим доступа : http://festival.1september.ru/
3. Теорема [Электронный ресурс]. – Википедия: свободная энциклопедия. – Режим доступа : http://ru.wikipedia.ord/wiki/Теорема

Научный руководитель: учитель математики
Сафьянова С. В.